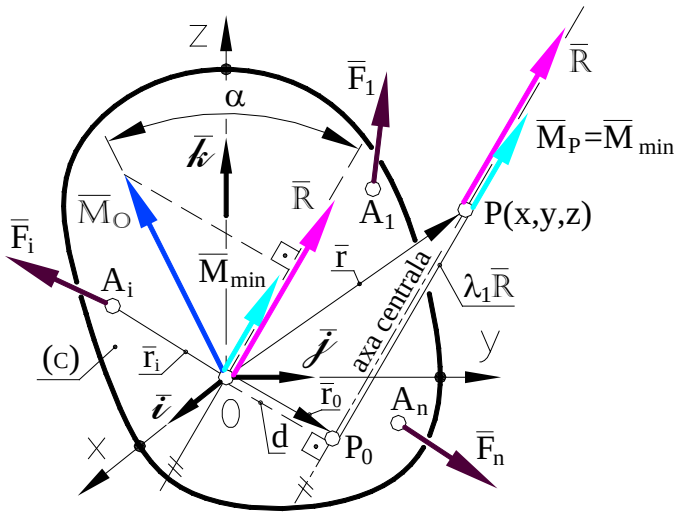
TIBERIU-PAVEL ITUL NICOLAE HAIDUC

MECANICA I

STATICA şi CINEMATICA

CURS



CLUJ-NAPOCA, 2012

PREFAȚĂ

Lucrarea de față se adresează în primul rând studenților secțiilor de Autovehicule Rutiere, Ingineria Materialelor şi Ingineria Mediului Industrial din cadrul Universității Tehnice din Cluj-Napoca, corespunzând programelor analitice aprobate de Consiliile Facultăților de Mecanică şi de Ingineria Materialelor şi a Mediului.

Cursul are la baza experiența didactică a primului autor precum şi numeroasele lucrări similare apărute în țară şi străinătate.

Având în vedere că noile planuri de învățământ prevăd un număr redus de ore de Mecanică, cursul de fața încearcă să răspundă noilor cerințe. Au fost evitate o serie de demonstrații simple sau facile, cu scopul de a putea integra cât mai multe informații necesare viitorilor ingineri. S-a încercat utilizarea unui limbaj accesibil studenților din anul I şi II, care fac cunoştință în premieră cu o disciplină tehnică.

Metoda de bază în tratarea problemelor de Mecanică este cea vectorială, dar în foarte multe cazuri s-a recurs la transcrierea matriceală a expresiilor vectoriale, mai apropiată de oportunitățile de programare.

Lucrarea cuprinde trei părți – Statică, Cinematica şi Dinamica, fiind structurată pe cincisprezece capitole. Cursul nu conține aplicații deoarece acestea vor face obiectul unei alte lucrări.

După capitolul de Introducere în următoarele două capitole sunt studiate echilibrul punctului material şi echivalența sistemelor de forțe care acționează asupra unui solid rigid. Capitolul 4 defineşte şi rezolvă problema geometriei maselor: centrele de masă şi momentele de inerție. Statica rigidului liber şi supus la legături este tratată în capitolul 5. În capitolul 6 sunt prezentate pe lângă teoremele staticii sistemelor de corpuri rigide şi aplicarea acestora la grinzile cu zăbrele plane şi firele ideale.

Capitolele 7 şi 8 se referă la probleme legate de cinematica punctului material şi cinematica rigidului. S-a acordat o extinderea sporită mişcării plane, mişcare în care se află elementele mecanismelor plane. Capitolul 9 tratează mişcarea

relativă a punctului şi mişcarea relativă a rigidului întâlnită mai ales la elementele mecanismelor roboţilor seriali, paraleli sau hibrizi. Cu scopul unei mai bune înţelegeri, demonstraţiile s-au făcut pentru cazul raportării rigidului la două sisteme de referinţă mobile, rezultatele fiind apoi generalizate pentru cazul a unui număr oarecare de sisteme de referinţă mobile.

În capitolul 10 se studiază dinamica punctului material liber şi supus la legături cu şi fără frecare. Capitolul 11 este destinat noţiunilor fundamentale şi teoremelor generale ale dinamicii sistemelor materiale cu ajutorul cărora se poate rezolva practic orice problemă de dinamică. Pe baza teoremelor generale, în capitolul 12, este studiată dinamica principalelor mişcări particulare ale solidului rigid: mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe, având ca aplicaţie echilibrajul rotorilor şi pendulul fizic, mişcarea plană, precum şi mişcarea sferică, având ca aplicaţie giroscopul.

Elemente privind mişcările impulsive sunt expuse în capitolul 13, unde, pe baza teoremelor fundamentale specifice ciocnirilor sunt rezolvate probleme de determinare a percuţiilor în lagăre.

Principiile Mecanicii analitice: principiul lui d'Alembert, principiul lucrului mecanic virtual, ecuaţiile lui Lagrange şi ecuaţiile canonice ale lui Hamilton sunt deduse în capitolul 14.

Dintre vibraţiile mecanice, în capitolul 15, sunt studiate numai vibraţiile liniare ale sistemelor mecanice cu un grad de libertate.

Autorii aduc mulţumiri recenzenţilor prezentei lucrări pentru analiza atentă a manuscrisului şi pentru recomandările făcute de care s-a ţinut seama la prezentarea finală a cărţii.

Cu speranţa ca această lucrare va fi de un real folos studenţilor de la secţiile facultăţilor cu profil mecanic din Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, autorul rămâne îndatorat acelora care îi vor comunica observaţiile şi sugestiile de care să se ţină seama la o eventuală ediţie ulterioară.

Cluj-Napoca, februarie 2012 Autorii

CUPRINS

PREFAȚĂ 3

1. **Introducere** 13
   1.1. Obiectul mecanicii 13
   1.2. Noțiunile fundamentale ale mecanicii 13
   1.3. Modele folosite în mecanică 13
   1.4. Legile de bază ale mecanicii 14
   1.5. Diviziunile mecanicii 15
   1.6. Scurtă privire asupra dezvoltării Mecanicii 15

STATICA

2. Statica punctului 19
   2.1. Punctul material liber.Punctul material supus la legături. Grade de libertate 19
   2.2. Condiția de repaus(echilibru) a punctului material liber 19
   2.3. Echilibrul punctului material supus la legături ideale. Axioma legăturilor 20
   2.4. Echilibrul punctului material obligat să rămâna pe o suprafață ideală 22
   2.5. Echilibrul punctului material obligat să rămâna pe o curbă ideală 24
   2.6. Frecarea de alunecare.Coeficientul frecării de alunecare. Legile lui Coulomb 25
   2.7. Echilibrul punctului material obligat să rămână pe o suprafață aspră 27
   2.8. Echilibrul punctului material obligat să rămâna pe o curbă aspră 30

3. Forțe şi momente 33
   3.1. Caracterul de vector alunecator al forței aplicată unui solid rigid 33
   3.2. Momentul unei forțe în raport cu un punct 33
   3.3. Momentul unei forțe în raport cu o axă 35
   3.4. Cuplul de forțe 35
   3.5. Operații elementare de echivalență 36
   3.6. Reducerea unui sistem de forțe într-un punct al unui rigid 37
      3.6.1. Torsor de reducere 37
      3.6.2. Proprietățile elementelor torsorului de reducere 39

3.6.3. Torsor minimal.Axă centrală 40
3.6.4. Teorema lui Varignon 43
3.6.5. Cazuri de reducere a sistemelor de forțe 44
3.7. Reducerea sistemelor de forțe coplanare 45
3.8. Reducerea sistemelor de forțe paralele 46

4. Geometria maselor 51
4.1. Centre de greutate (Centre de masă) 51
4.1.1. Centrul de greutate şi de masă al unui sistem de puncte materiale 51
4.1.2. Centrul de greutate al unui corp oarecare 53
4.1.3. Centrul de greutate al unui corp omogen 54
4.1.4. Centrul de greutate al corpurilor compuse 57
4.1.5. Teoremele lui Guldin-Pappus 59
4.2. Momente de inerție 61
4.2.1. Momente de inerție mecanice. Momente de inerție geometrice.Rază de giratie 61
4.2.2. Variația momentelor de inerție mecanice în raport cu axe paralele.Teorema lui Steiner 64
4.2.3. Variația momentelor de inerție mecanice centrifugale în raport cu axe paralele 66
4.2.4. Variatia momentelor de inerție mecanice în raport cu axe concurente 67
4.2.5. Momente principale de inerție. Axe principale de inerție 69
4.2.6. Elipsoidul de inerție 75

5. Statica rigidului 79
5.1. Echilibrul solidului rigid liber 79
5.1.1. Parametrii geometrici care definesc poziția unui corp rigid în spațiu. Grade de libertate 79
5.1.2. Ecuațiile de echilibru ale solidului rigid liber 81
5.2. Echilibrul solidului rigid supus la legături fară frecare 83
5.3. Legăturile fără frecare ale rigidului 83
5.3.1. Reazemul simplu 83
5.3.2. Cupla sferă-curbă 85
5.3.3. Cupla cilindru-plan 86
5.3.4. Cupla plan-plan 87
5.3.5. Articulația sferică 87
5.3.6. Cupla cilindrică 88
5.3.7. Cupla de rotație 88
5.3.8. Cupla prismatică 89
5.3.9. Încastrarea 90
5.3.10. Legătura prin fir şi prin bară dublu articulată 90

5.4. Echilibrul solidului rigid supus la legături cu frecare 91
5.4.1. Generalităţi privind frecările. Condiţii de echilibru 91
5.4.2. Frecarea de alunecare 93
5.4.3. Frecarea de rostogolire 95
5.4.4. Frecarea de pivotare 96
5.4.5. Frecarea în articulatii şi lagăre 98

6. Statica sistemelor de corpuri rigide 101
6.1. Echilibrul sistemelor de corpuri rigide 101
6.2. Grinzi cu zăbrele plane 103
6.2.1. Generalităţi. Ipoteze simplificatoare 103
6.2.2. Metoda echilibrului nodurilor 105
6.2.3. Metoda secţiunilor 106
6.3. Statica firelor 107
6.3.1. Ecuaţiile generale de echilibru ale firelor suspendate, acţionate de sarcini continue 108
6.3.2. Echilibrul firului omogen greu suspendat la capete 110
6.3.3. Fir omogen greu foarte întins 113
6.3.4. Frecarea firelor 115
6.3.5. Echilibrul firului petrecut peste un scripete 117

CINEMATICA

7. Cinematica punctului 119
7.1. Traiectoria mişcării unui punct 119
7.2. Viteza punctului material 121
7.3. Acceleraţia punctului material 122
7.4. Componentele vitezei şi acceleraţiei în coordinate carteziene 123
7.5. Componentele vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului lui Frenet 126
7.6. Componentele vitezei şi acceleraţiei în coordonate cilindrice şi polare 127
7.7. Mişcarea circulară a punctului material 131
7.8. Viteza areolară. Acceleraţia areolară 134

8. **Cinematica rigidului** 137
8.1.Generalităţi. Traiectoria unui punct aparţinând rigidului aflat în mişcare generală 137
8.2.Distribuţia vitezelor. Formulele lui Poisson 139
8.3.Distribuţia acceleraţiilor 142
8.4. Mişcări particulare ale rigidului 143
8.4.1. Mişcarea de translaţie 144

8.4.2. Mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe 145
8.4.3. Mişcarea de roto-translaţie 150
8.4.4. Mişcarea plan-paralelă. Mişcarea plană 155
8.4.4.1. Studiul geometric 156
8.4.4.2. Distribuţia vitezelor 157
8.4.4.3. Teorema lui Arnhold-Kennedy 163
8.4.4.3. Distribuţia acceleraţiilor 164
8.4.5. Mişcarea rigidului cu un punct fix 169
8.5. Componentele scalare ale vitezei şi acceleraţiei unghiulare pe axele sistemelor de referinţă fix şi mobil în funcţie de cosinusurile directoare şi unghiurile lui Euler şi de derivatele acestora în raport cu timpul 174

9. Cinematica mişcării relative 179
9.1. Cinematica mişcării relative a punctului 179
9.1.1. Generalităţi 179
9.1.2. Problema traiectoriilor 179
9.1.3. Derivata absolută (totală) şi relativă (locală) a unui vector 181
9.1.4. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a punctului 182
9.1.5. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a punctului 183
9.2. Cinematica mişcării relative a rigidului 185
9.2.1. Studiul geometric 185
9.2.2. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a rigidului 190
9.2.3. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a rigidului 194

BIBLIOGRAFIE 309

1. INTRODUCERE

1.1. Obiectul mecanicii

Mecanica clasică (raţională, teoretică, tehnică) studiază deplasarea relativă a corpurilor materiale macroscopice cu viteze neglijabile faţă de aceea de propagare a undelor electromagnetice în vid, sau altfel spus Mecanica studiază mişcarea mecanică a sistemelor materiale.

1.2. Noţiunile fundamentale ale mecanicii

În mecanică se utilizează următoarele noţiuni cu caracter general numite noţiuni fundamentale: spaţiul, timpul, masa şi forţa.

Spaţiul este o reprezentare generalizată a dimensiunilor corpurilor, a distanţelor dintre ele. În Mecanica clasică este adoptat spaţiul Euclidian (Euclid din Alexandria, cca. 450-380 î.H.) cu trei dimensiuni, omogen, izotrop şi infinit. Ca sisteme de referinţă, considerate fixe, pentru mişcările curente din tehnică, se pot folosi repere solidare cu Pământul.

Timpul reprezintă o generalizare a duratei evenimentelor şi intervalelor dintre ele. Timpul este considerat unidimensional şi infinit.

Noţiunea de *masă* reflectă proprietatea de inerţie a corpurilor şi de a produce câmp gravific. În cadrul aproximaţiilor Mecanicii clasice masa este o mărime scalară constantă, pozitivă, deci independentă de viteză.

Forţa este o mărime care măsoară interacţiunea mecanică dintre corpurile materiale. Forţa are un caracter vectorial deoarece efectul forţei depinde de punctul de aplicaţie, de intensitate, de direcţia şi sensul ei.

1.3. Modele folosite in mecanică

Pentru a putea utiliza calculul matematic corpurile materiale se schematizează sub forma unor modele teoretice cum ar fi: punctul material, sistemul de puncte materiale, linia materială, suprafaţa materială, corpul material, mediul continuu, solidul rigid.

Punctul material reprezintă modelul unui corp de dimensiuni neglijabile în raport cu alte corpuri sau cu distanţele dintre ele şi are ca elemente: punctul geometric pentru reprezentarea poziţiei corpului şi masa ca măsură a inerţiei corpului.

O mulţime finită de puncte materiale aflate în interacţiune mecanică formează un *sistem de puncte materiale*.

Linia materială este modelul unui corp la care două dimensiuni, care determină secțiunea transversală, pot fi neglijate (sunt relativ mici) în raport cua treia, numită lungime. Are ca elemente o linie geometrică, dreaptă sau curbă, reprezentând axa geometrică a corpului şi o masă distribuită de-a lungul ei, ca mărime ce măsoară inerția corpului. Liniile materiale se numesc bare, dacă prezintă rigiditate la schimbarea formei, sau fire, dacă această rigiditate este neglijabilă, respectiv dacă sunt foarte flexibile dar inextensibile.

Suprafața materială reprezintă modelul unui corp la care o dimensiune (grosimea) este neglijabilă (relativ mică) în raport cu celelalte două (lungimea şi lățimea), fiind caracterizată de o suprafață geometrică, plană sau curbă, reprezentând suprafața mediană a corpului şi o masă distribuită pe suprafața mediană, ca mărime ce măsoară inerția corpului. Suprafețele materiale se numesc plăci dacă prezintă rigiditate la schimbarea formei sau membrane în caz contrar, adică atunci când sunt foarte flexibile dar inextensibile.

Corpul material modelează un corp la care cele trei dimensiuni sunt aproximativ de acelaşi ordin de mărime şi are ca elemente corpul geometric căruia i se ataşează o masă distribuită în volumul corpului.

Mediul continuu reprezintă modelul unui corp al cărui volum este ocupat integral de substanță deşi în realitate structura atomică este discontinuă.

Solidul rigid (rigidul) este un mediu continuu indeformabil. Rigidul poate fi considerat ca un sistem alcătuit dintr-un număr infinit de puncte materiale având distanțele dintre ele invariabile (indiferent de forțele care acționează asupra corpului) şi ocupând acelaşi domeniu ca şi corpul.

1.4. Legile de bază ale mecanicii

Isaac Newton (Newton, Isaac, 1643-1727) a enunțat în celebra lucrare "Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1686) principiile mecanicii pe care le-a denumit *axiomele* sau *legile mişcări*i.

Legea I-a (Principiul inerției): "Un corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atâta timp cât nu intervin forțe care să-i modifice această stare".

Legea a II-a *(Principiul forței)*: "Variația mişcării este proporțională cu forța imprimată şi este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța".

Legea a III-a (Principiul acțiunii şi reacțiunii): "Reacțiunea este totdeauna egală şi contrară cu acțiunea sau, acțiunile reciproce a două corpuri sunt totdeauna egale şi dirijate în sensuri contrarii".

Corolarul I (Principiul paralelogramului): "Un corp sub acțiunile a două forțe unite descrie diagonala paralelogramului, construit pe cele două forțe, în acelaşi timp în care ar descrie laturile sub acțiunile separate ale forțelor".

Observaţii:

1) Prin denumirea de corp folosită de Newton se înţelege de fapt punct material iar mişcarea la care se referă legile mecanicii este raportată la un reper absolut şi imobil.

2) Legea a II-a a mecanicii:

$$d\frac{(m\cdot\overline{v})}{dt}=\overline{F}, \tag{1.1}$$

ţinând seama că masa este constantă, poate fi pusă sub formă:

$$m\cdot\overline{a}=\overline{F} \tag{1.2}$$

S-au făcut notaţiile: m - masa punctului; $\overline{v}$ - viteza punctului; $\overline{a}$ - acceleraţia punctului.

3) Este impropriu să se considere ca forţele reprezentând acţiunea şi reacţiunea din legea a III-a is fac echilibru, ele acţionând, în general, asupra a două puncte diferite.

4) Prin principiul paralelogramului se confirmă faptul ca regulă paralelogramului care stă la baza calculului vectorial se aplică şi forţelor. Acest principiu nu este o consecinţă logică a primelor trei, corectitudinea lui fiind confirmată din experienţa.

1. 5. Diviziunile mecanicii

Potrivit unei împărţiri devenite clasice, Mecanica se compune din trei părţi: statica, cinematica şi dinamica.

Statica studiază condiţiile de echilibru şi de echivalenţă a sistemelor de forţe care acţionează asupra corpurilor materiale.

Cinematica se ocupă cu studiul geometric al mişcării corpurilor fără să ia în considerare forţele aplicate corpurilor şi masele lor.

Dinamica tratează mişcarea corpurilor sub acţiunea forţelor, ţinând seama şi de masele lor.

1. 6. Scurtă privire asupra dezvoltării Mecanicii

Conceptual, Mecanica a apărut o dată cu crearea primelor mijloace de producţie şi a evoluat împreună cu dezvoltarea economică a societăţii omeneşti. Necesităţile impuse de arta construcţiilor au făcut ca, încă din antichitate, să apară primele elemente de Statică. Mecanica nu exista ca ştiinţă ci doar ca aplicare a unor dispozitive mecanice simple, precum pârghia, şurubul, scripetele, planul înclinat. Dezvoltarea Mecanicii a fost impulsionată, şi de căutările legate de nevoile omului de a-şi explica universul în care trăieşte. Istoria mecanicii este marcată de realizările unor savanţi de geniu.

Filozofului *Arhitas* din Trent (430-365 î.C) i se aribuie descoperirea scipetelui şi şurubului. *Aristotel* (384-322 î.C) s-a preocupat de problema echilibrului, a căderii corpurilor şi a abordat pentru prima dată problema relativității mişcării. *Arhimede* (287-212 î.C), mare geometru, este considerat adevăratul părinte al Staticii. De el se leagă teoria pârghiilor, teoria compunerii şi descompunerii forţelor paralele, definirea centrului de greutate, unele legi ale hidrostaticii. *Pappus din Alexandria* (290-350) s-a preocupat de probleme legate de centrul de greutate şi de planul înclinat.

Cunoştintele de Mecanică au stagnat în prima parte a Evului Mediu. Abia în timpul Renaşterii, o dată cu înflorirea artelor şi celorlalte ştiințe, în Mecanica au fost aduse contribuții remarcabile, făcându-se saltul de la Statică la Dinamică. *Leonardo da Vinci* (1452-1519), mare artist şi învățat, a făcut cercetări privind căderea liberă a corpurilor, a introdus noțiunea de moment, a sudiat ciocnirile şi a stabilit unele reguli ale frecărilor. Lui *Nicolaus Copernicus* (1473-1543) i se datorează teoria heliocentrică a sistemului solar, eveniment considerat revoluționar. *Johann Kepler* (1571-1630) stabileşte celebrele trei legi ale mişcării planetelor care îi poarta numele. Figura cea mai proeminentă a acestei epoci este fără îndoială *Galileo Galilei* (1564-1642) de care se leagă formularea noțiunilor principale ale Cinematicii şi stabilirea formulei căderii corpurilor. Se consideră că istoria Dinamicii începe cu el prin formularea: legii inerției, teoriei mişcării pe planul înclinat, legilor mişcării unui corp lansat sub un anumit unghi, regulii de aur a Mecanicii, "cât se câstigă în forță se pierde în viteză". Au urmat: *Gilles de Roberval* (1602-1675) cu preocupări privind compunerea forțelor, *Evangelista Torricelli* (1608-1647), ucenicul lui Galilei, care dezvoltă teoria mişcării corpurilor grele, stabilitatea echilibrului şi rezolvă unele probleme de hidrostatică, *Simon Stevin* (1548 - 1620) cu principiul compunerii forțelor şi calculul presiunii apei, *René Descartes* (1596 - 1650) care emite, deşi cu erori, noțiunea de cantitate de mişcare, se preocupă de teoria ciocnirilor etc., *Blaise Pascal* (1623-1662) cu contribuții în Hidrostatică şi Teoria probabilităților, *Christiaan Huygens* (1629-1695) care a studiat mişcarea pendulului şi emis teoria naturii ondulatorii a luminii.

Alături de Galilei, *Isaac Newton* (1642-1727) este considerat părintele Mecanicii clasice sau Mecanicii care îi poartă numele. El a formulat cele trei principii fundamentale ale Mecanicii, al patrulea fiind considerat corolar. A aprofundat studiul forțelor, a descoperit legile fundamentale ale opticii, a pus bazele calculului infinitezimal. Ideile lui Newton s-au răspândit cu rapiditate datorită "iluminismului". *Pierre Varignon* (1654-1722) a avut preocupări în Statică definind complet noțiunea de moment al forței şi enunțând cunoscuta teoremă care îi poartă numele despre momentul rezultantei unui sistem de forțe. *Robert Hooke* (1635 - 1703) a determinat experimental relațiile dintre eforturi şi deformații în cazul corpurilor elastice. *Daniel Bernoulli* (1700-1782) a dat ecuațiile fundamentale ale hidrodinamicii. *Leonhard Euler* (1707-1783) a studiat dinamica punctului material cu utilizarea calculului diferențial. A

elaborat Mecanica solidului rigid cu introducerea unghiurilor care îi poartă numele. Este fondatorul Hidrodinamicii şi al teoriei stabilităţii barelor drepte. Are importante realizări în domeniul Rezistenţei materialelor şi Mecanicii cereşti. *Charles de Coulomb* (1736-1806) a stabilit experimental legile frecării uscate şi legea lui Coulomb în Electrostatică. *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827) s-a ocupat îndeosebi de mecanica cerească.

Principiile variaţionale ale Mecanicii sunt formulate spre mijlocul secolului XVIII. *Pierre Maupertuis* (1698-1759) enunţă principiul lui Maupertuis sau al minimei acţiuni. *Jean le Rond D'Alembert* (1717-1783) formulează metoda cinetostatică în Dinamică. O contribuţie deosebită în dezvoltarea Mecanicii a avut-o *Joseph Louis Lagrange* (1736 - 1813). A fondat Mecanica analitică pe baza principiului deplasărilor virtuale. *Louis Poinsot* (1777-1859) studiază mişcarea corpului rigid şi sistemele de forţe dând o formă definitivă mecanicii corpului solid. *Siméon Denis Poisson* (1781-1840) se preocupă de dezvoltarea metodelor generale de integrare a ecuaţiilor diferenţiale ale Dinamicii. *Gaspar-Gustave de Coriolis* (1792-1843) a analizat influenţa rotaţiei Pământului asupra proceselor ce se desfăşoară pe el. Studii decisive de Statică, Rezistenţa materialelor şi de Elasticitate au avut: *Claude-Louis Navier* (1785 - 1836), *Barré de Saint-Venant* (1797 –1886), *Gabriel Jean Baptiste Lamé* (1785-1870). Ultimul a devenit cunoscut pentru teoria sa generală a coordonatelor curbilinii. *William Rowan Hamilton* (1805-1865) a aplicat calculul variaţional în Mecanică şi a formulat principiul care îi poartă numele. *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804 – 1851) a introdus ecuaţiile cu derivate parţiale pentru formularea ecuaţiilor mişcării. *Mikhail Ostrogradski* (1801-1862) a studiat legăturile reonome şi cele exprimate analitic prin inegalităţi şi a aplicat principiul luvrului mecanic virtual pentru asfel de lagături. A dat o nouă formă ecuaţiei generale a Dinamicii care prin integrare conduce la principiul lui Hamilton – Ostrogradski. Merită amintiţi şi alti savanţi care au contribuit esenţial la dezvoltarea Mecanicii: *Jean-Bernard-Léon Foucault* (1819-1868) – a demonstrat fără observaţii astronomice că Pământul se roteşte în jurul axei sale, *Sofia Kovalevskaia* (1850-1891) – a cercetat integrabilitatea ecuaţiilor de mişcare a corpului rigid, *Alexander Mikhaylovich Liapunov* (1857 –1918) - a demonstrat că cele trei cazuri de integrabilitate ale rigidului cu punc fix sunt unice.

Studiile începute de Lagrange privind stabilitatea echilibrului şi mişcării au fost continuate de: *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805 – 1859), *E. I. Routh*, *N. E. Jukovski* (1857-1921), *A. M. Liapunov* (1857 –1918).

Fundamentele dinamicii corpului cu masă variabilă au fost puse de *V. I. Mescerski* (1859-1935) ale cărui studii au stat la baza teoriei mişcării reactive aprofundate de *K. E. Ţiolkovski* (1857-1935).

Nevoia de a explica anumite fenomene la care Mecanica clasică nu putea da răspuns a făcut să apară în secolul XX alte ramuri ale Mecanicii: Mecanica relativistă, Mecanica cuantică, Mecanica ondulatorie, Mecanica

statistică, Mecanica Roboților etc. Numele unor savanți ca *Max Planck* (1858-1947) şi *Albert Einstein* (1879-1955) sun bine cunoscute.

Dintre corifeii şcolii româneşti de Mecanică merită amintiți:

Elie Angelescu (1836-1882) – primul professor de Mecanică rațională la Universitatea Bucureşti;

Simion Sanielevici (1870-1963) – în 1929 şi 1931 publică primul curs de mecanică rațională tipărit in limba română care utilizează calculul vectorial şi se preocupă de studiul corzilor vibrante;

Traian Lalescu (1882-1929) – are rezultate notabile în domeniul ecuațiilor integrale, teoria matematică a aeroplanelor şi pendulului lui Foucault.

Victor Vâlcovici (1885-1970) - creatorul hidrodinamicii şi aerodinamicii româneşti. A studiat mişcare lichidelor, mişcarea solidului cu masă variabilă. A avut rezultate meritorii în domeniul Elasticității şi Teoriei relativității

Octav Onicescu (1992-1983) – are realizări deosebite în domeniile: Mecanică statistică, Teoria relativității, Mecanica invariantă a mjediilor continue, Mecanica ondulatorie;

Dumitru Ioan Mangeron (1906-1991) – cu contribuții mai ales în Mecanica analitică.

Caius Iacob (1912-1992) – considerat părintele şcolii româneşti de Mecanică şi Mecanica fluidelor.

Radu Voinea (1923-2010) - dintre contribuțiile originale ale căruia se pot menționa: suficiența principiului lucrului mecanic virtual, introducerea conceptului de sistem critic alături de sistemele olonome şi neonolome, distribuția acceleraților în mişcarea relativă a rigidului, metoda ciclurilor independente, analiza pozițională a mecanismelor, sinteza cuplelor cinematice, efectul cuplării unor structuri de rigidități foarte diferite, dinamica suspensiei autovehiculelor, vibrațiile rotorilor situați în sisteme neinertiale etc. În cadrul activității de cercetare ştiințifică a abordat probleme de mecanică teoretică, de teoria mecanismelor, de stabilitate elastică şi de dinamica autovehiculelor şi maşinilor.

În cadrul Universităților din marile centre universitare din România s-au format colective puternice de cercetare în domeniul Mecanicii raționale şi aplicative cu rezultate recunoscute inclusiv pe plan internațional.

STATICA

2. STATICA PUNCTULUI

2.1. Punct material liber. Punct material supus la legături. Grade de libertate

Un punct material este liber dacă poate ocupa orice poziție în spațiu fără nici o restricție de natură geometrică. Pozițiile ocupate de către punct sunt determinate numai de forțele care acționează asupra lui.

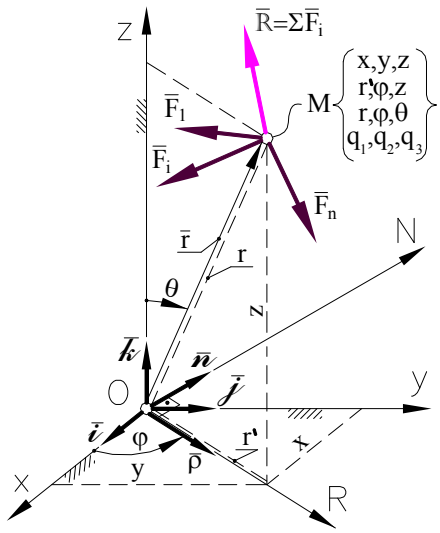


Fig 2.1

Poziția punctului material liber este convențional definită, ca în figura 2.1, prin trei parametri independenți între ei care se aleg în funcție de sistemul de referință utilizat: coordonate carteziene (x,y,z); coordonate cilindrice (r,θ,z); coordonate sferice (r_1,φ,θ); coordonate curbilinii (q_1,q_2,q_3).

Un punct material este supus la legături dacă este obligat să ocupe numai anumite poziții în spațiu, de exemplu să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau într-o poziție fixă din spațiu.

Numărul parametrilor independenți necesari pentru a defini poziția unui punct în spațiu reprezintă numărul gradelor de libertate ale acestuia.

Astfel, un punct material liber are trei grade de libertate, un punct pe o suprafață are două grade de liberatate (coordonatele curbilinii ale suprafeței), un punct pe o curbă are un grad de libertate (coordonata curbilinie a curbei), iar un punct obligat să rămână într-o poziție fixă nu are nici un grad de libertate.

2.2. Condiția de repaus (echilibru) a punctului material liber

Un sistem de "n" forțe: $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$,…, $\bar{F}_n$, care acționează asupra unui punct formează un sistem de forțe concurente, vectorii ce reprezintă forțele fiind vectori legați. Aplicând succesiv regula paralelogramului, se ajunge la o construcție grafică numită poligonul forțelor din care se obține o forță unică $\bar{R}$ numită *rezultanta sistemului de forțe*, echivalentă mecanic cu sistemul dat (fig.2.1) şi egală cu suma vectorială a forțelor componente:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \tag{2.1}$$

Condiția necesară şi suficientă ca un punct material liber aflat în repaus să continue să rămână în repaus (echilibru), sub acțiunea unui sistem de forțe concurente este ca acest sistem să fie echivalent cu zero:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0 \tag{2.2}$$

Necesitatea şi suficiența acestei condiții derivă din aplicarea principiului inerției, conform căruia dacă asupra unui punct material aflat în repaus într-un reper fix nu acționează nici o forță, el va continua să rămână în repaus.

Proiectând ecuația vectorială (2.2) pe axele sistemului de referință adoptat, de exemplu pe axele unui reper cartezian, se obțin ecuațiile scalare de echilibru ale punctului liber:

$$\overline{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix} = 0, \quad \overline{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iy} = 0, \quad \overline{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iz} = 0 \tag{2.3}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (2.3) pot fi studiate următoarele probleme:

a) Se cunosc forțele ce acționează asupra punctului şi se cere aflarea poziției sale de echilibru. Deoarece numărul necunoscutelor (coordonatele punctului) este egal cu numărul ecuațiilor, aceste probleme pot fi, în general, rezolvate, conducând la soluții bine determinate.

b) Se cunoaşte poziția de echilibru a punctului şi se cer să se determine forțele care, dacă acționează asupra lui, îl mențin în repaus. Dacă numărul necunoscutelor scalare este egal cu trei, se ajunge, în general, la o soluție unică.

Pot fi întâlnite şi probleme mixte în cadrul cărora apar necunoscute legate atât de poziția de echilibru a punctului, cât şi de sistemul de forțe care acționează asupra lui.

2.3. Echilibrul punctului material supus la legături ideale. Axioma legăturilor

În cazul punctului material supus la legături, condiția (2.2) scrisă pentru forțele efectiv aplicate nu mai este necesară. De exemplu, un punct material greu situat pe un cerc vertical rămâne în echilibru în vecinătatea punctului B cel mai de jos al cercului (fig.2.2a).

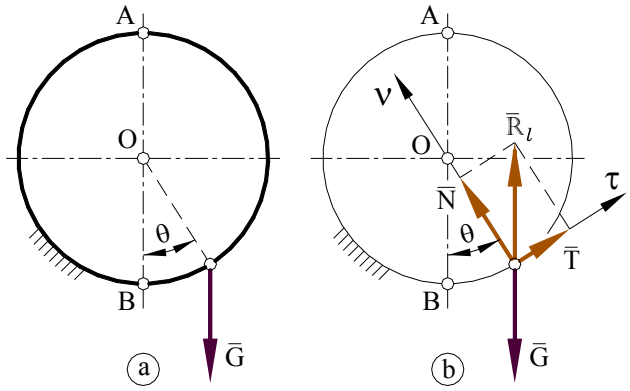


Fig. 2.2

Este evident că:

$$\overline{R} = \overline{G} \neq 0 \tag{2.4}$$

Pentru a găsi condiția necesară şi suficientă ca un punct supus unei legături să rămână în repaus, ne vom imagina punctul eliberat de legătură. În acest caz, dacă asupra lui ar acționa încă o forță $\overline{R}_1$ egală în modul şi direct opusă lui $\overline{R} = \overline{G}$, punctul ar rămâne în echilibru (fig.2.2b) în aceeaşi poziție ca în figura 2.2a. Forța $\overline{R}_1$ care reprezintă echivalentul mecanic al legăturii se numeşte *forță de legătură* sau *reacțiune*.

Operația de suprimare a unei legături geometrice şi de înlocuire a ei cu o forță conduce la *axioma legăturilor* în baza căreia: *"Orice legătură geometrică poate fi întotdeauna înlocuită cu o forță denumită forță de legătură sau reacțiune. Punctul material, eliberat de legatură, acționat de forțele date şi de reacțiune este echivalent din punct de vedere mecanic cu punctul material supus la legături"*.

În baza acestei axiome, condiția necesară şi suficientă ca punctul material supus la legături să rămână în repaus, este:

$$\overline{R} + \overline{R}_1 = 0 \tag{2.5}$$

Descompunem reacțiunea după direcția normalei la suprafața pe care se află punctul în echilibru (sau o direcție din planul normal în punctul respectiv, dacă punctul se găseşte pe o curbă) şi o direcție din planul tangent dus la aceeaşi suprafață (sau direcția tangentei dusă în punctul respectiv la curbă), obținând componentele $\overline{N}$ şi $\overline{T}$:

$$\overline{R}_1 = \overline{N} + \overline{T} \tag{2.6}$$

Rolul componentei $\overline{N}$ este de a împiedica punctul material să se deplaseze în direcția *normalei* la legătură, respectiv să părăsească legătura. Ea

se numeşte *reacţiune normală*. Componenta $\overline{T}$ are rolul de a împiedica punctul să se deplaseze pe direcţia *tangentei* la legătură, respectiv să alunece pe legătură. Ea se numeşte *forţă de frecare*. Legăturile pentru care $\overline{T} = 0$, se numesc *legături ideale*. Asemenea legături nu există în realitate. Există însă curbe sau suprafeţe pentru care, într-o primă aproximaţie, frecarea poate fi neglijată. Condiţia de echilibru (2.5) devine în acest caz :

$$\overline{R} + \overline{N} = 0 \qquad (2.7)$$

În general, necunoscutele unei probleme de punct material supus la legături ideale sunt: poziţia de repaus (echilibru) şi valoarea reacţiunii. Dacă numărul necunoscutelor scalare este egal cu trei, se ajunge, în general, la o soluţie bine determinată.

2.4. Echilibrul punctului material obligat să rămână pe o suprafaţă ideală

În figura 2.3 se consideră un punct M obligat să rămână pe suprafaţa fixă şi indeformabilă având ecuaţia:

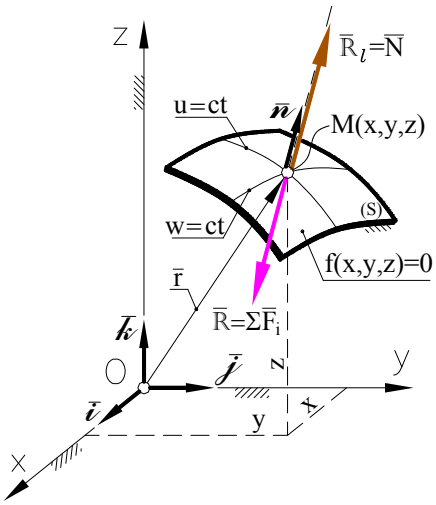


Fig. 2.3

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (2.8)$$

Asupra punctului acţionează un sistem de forţe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, …, $\overline{F}_n$ a cărui rezultantă este:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \qquad (2.9)$$

Dacă neglijăm frecarea, urmărim să determinăm poziţia de echilibru a punctului şi reacţiunea normală.

Mişcarea interzisă de legătură fiind în lungul normalei la suprafaţă, reacţiunea are direcţia normalei şi sensul contrar mişcării interzise.

Reacţiunea poate fi exprimată:

$$\overline{N} = \lambda \overline{n}\,, \qquad (2.10)$$

unde λ este un parametru scalar iar $\overline{n}$ este un vector normal în M la suprafaţă. Un asemenea vector este gradientul funcţiei f(x,y,z):

$$\bar{n} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} \tag{2.11}$$

Luând în considerare (2.10), ecuația (2.7) devine:

$$\bar{R} + \lambda \bar{n} = 0 \tag{2.12}$$

Proiectând ecuația vectorială (2.12) pe axele sistemului de referință Oxyz, obținem ecuațiile de echilibru scalare ale punctului pe o suprafață ideală:

$$R_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,\quad R_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,\quad R_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{2.13}$$

unde:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\,,\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\,,\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \tag{2.14}$$

la care se adaugă ecuația (2.8) a suprafeței.

Din rezolvarea sistemului de ecuații (2.13) şi (2.8), se obțin cele patru necunoscute: coordonatele x,y,z ale punctului în poziția de echilibru şi parametrul λ care determină reacțiunea normală prin proiecțiile ei. Astfel, din (2.10) se obțin:

$$\bar{N}_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x},\quad \bar{N}_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y},\quad \bar{N}_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \tag{2.15}$$

cu ajutorul cărora se determină modulul reacțiunii normale:

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \tag{2.16}$$

Dacă ne interesează numai poziția de echilibru, atunci din ecuațiile (2.13) se elimină parametrul λ obținând două ecuații:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \tag{2.17}$$

la care se ataşează ecuația (2.8).

2.5. Echilibrul punctului material obligat să rămână pe o curbă ideală

În figura 2.4 este reprezentat un punct material M obligat să rămână pe o curbă fixă, indeformabilă şi lucie de ecuaţii:

$$f_1(x, y, z) = 0;\ f_2(x, y, z) = 0 \qquad (2.18)$$

Asupra punctului acţionează un sistem de forţe $\overline{F}_i$, $(i = 1 \div n)$, a cărui rezultantă este $\overline{R}(R_x, R_y, R_z)$.

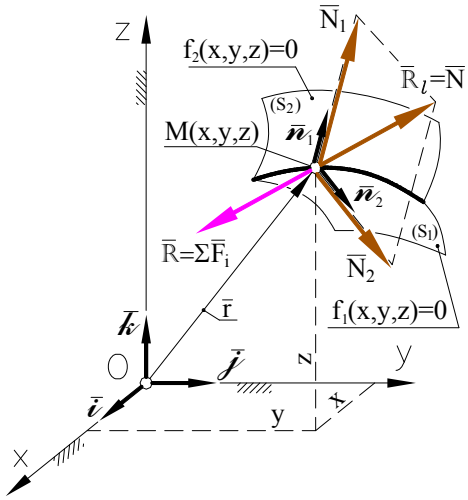


Fig. 2.4

Se cere determinarea poziţiei de echilibru a punctului material şi reacţiunea curbei.

Ecuaţia vectorială de echilibru a punctului este:

$$\overline{R} + \overline{N} = 0 \qquad (2.19)$$

Reacţiunea normală $\overline{N}$ este conţinută în planul normal la curbă, plan determinat de vectorii normali la cele două suprafeţe de ecuaţii, $f_1(x, y, z) = 0$ şi $f_2(x, y, z) = 0$:

$$\overline{n}_1 = \nabla f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\overline{k};\ \overline{n}_2 = \nabla f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\overline{k} \qquad (2.20)$$

Vectorul $\overline{N}$ fiind coplanar cu $\overline{n}_1$ şi $\overline{n}_2$ se poate scrie:

$$\overline{N} = \lambda_1\overline{n}_1 + \lambda_2\overline{n}_2 \qquad (2.21)$$

Forma analitică a ecuaţiei (2.19),

$$R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k} + \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\overline{k}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\overline{k}\right) = 0, \qquad (2.22)$$

înmulţită scalar, succesiv cu $\overline{i}$, $\overline{j}$ şi $\overline{k}$, conduce la ecuaţiile de echilibru scalare ale punctului obligat să rămână pe o curbă cu frecare neglijabilă:

$$R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 ; R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 ; R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \tag{2.23}$$

la care se adaugă ecuațiile curbei (2.18).

Rezolvarea sistemului de ecuații (2.23) şi (2.18) permite determinarea coordonatelor x, y, z ale sistemului în poziția de echilibru şi parametrii λ_1 şi λ_2 care determină reacțiunea curbei prin proiecțiile ei:

$$N_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} , \quad N_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} , \quad N_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \tag{2.24}$$

Modulul reacțiunii normale este:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} \tag{2.25}$$

Orientarea se calculează prin cosinusurile directoare:

$$\cos \sphericalangle \left(\overline{N}, O_x\right) = N_x / N , \ \cos \sphericalangle \left(\overline{N}, O_y\right) = N_y / N , \ \cos \sphericalangle \left(\overline{N}, O_z\right) = N_z / N \tag{2.26}$$

Dacă interesează numai poziția de echilibru a punctului, atunci se elimină parametrii λ_1 şi λ_2 din ecuațiile (2.23), rezultând ecuația:

$$\begin{vmatrix} R_x & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ R_y & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ R_z & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 , \tag{2.27}$$

la care se adaugă ecuațiile carteziene (2.18) ale curbei. Se obține astfel un sistem de trei ecuații în necunoscutele x, y, z.

2.6. Frecarea de alunecare. Coeficientul frecării de alunecare. Legile lui Coulomb

În figura 2.5 este reprezentat un corp de dimensiuni neglijabile, asimilabil cu un punct material, care se sprijină pe un plan fix, aspru. Asupra punctului acționează numai forța $\overline{P}$, normală la plan. Din partea planului apare

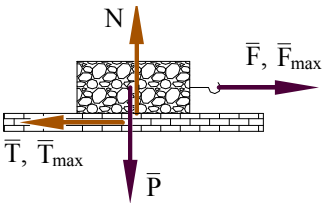


Fig. 2.5

reacțiunea normală $\overline{N}$ care echilibrează forța $\overline{P}$. Se poate scrie relația vectorială:

$$\overline{P} + \overline{N} = 0, \tag{2.28}$$

din care rezultă:

$$N = P \tag{2.29}$$

În continuare, asupra punctului acționează şi o forța $\overline{F}$ paralelă cu planul, a cărei valoare numerică creşte progresiv începând de la zero. Se constată că pentru valori mici ale forței, corpul continuă să rămână în repaus, ceea ce arată că legătura se opune tendinței de alunecare a corpului cu o reacțiune numită *forță de frecare* care echilibrează forța activă $\overline{F}$, conform relației:

$$\overline{F} + \overline{T} = 0 \tag{2.30}$$

Din (2.30), se obține:

$$T = F \tag{2.31}$$

Corpul rămâne în echilibru atâta timp cât forța $\overline{F}$ nu depăşeşte o valoare maximă, căreia îi corespunde o forță maximă de frecare:

$$T_{max} = F_{max} \tag{2.32}$$

Se demonstrează experimental că forța de frecare maximă este proporțională cu reacțiunea normală, adică:

$$T_{max} = \mu N, \tag{2.33}$$

relație în care μ este *coeficientul frecării de alunecare*. Acesta este dat în tabele în funcție de natura suprafețelor aflate în contact şi de gradul de prelucrare al acestora. Corpul rămâne în echilibru (nu alunecă) dacă:

$$F \le F_{max} \tag{2.34}$$

sau, ținând seama de (2.31), (2.32) şi (2.33), dacă :

$$T \le \mu N \tag{2.35}$$

Coulomb (Coulomb, Charles Augustin, 1736-1806) a demonstrat experimental legile frecării cunoscute sub numele de *legile lui Coulumb*, legi care au însă o valabilitate limitată:

1. Forța maximă de frecare nu depinde de mărimea suprafețelor aflate în contact.

2. Forța maximă de frecare este proporțională cu valoarea reacțiunii normale.

3. Forța maximă de frecare depinde, ca şi coeficientul de frecare la alunecare, de natura suprafețelor în contact şi de gradul de prelucrare al acestora.

4. Forța maximă de frecare nu depinde de viteza relativă a corpurilor aflate în contact, pentru valori mici ale acesteia.

2.7. Echilibrul punctului material obligat să rămână pe o suprafață aspră

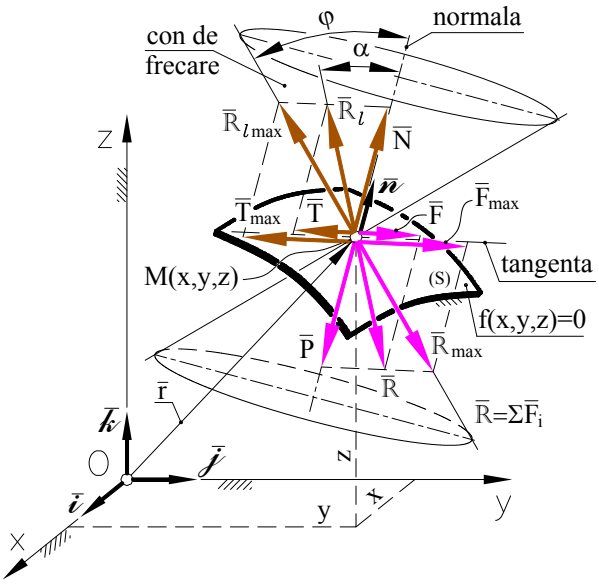


Fig. 2.6

În figura 2.6 se consideră un punct material M obligat să rămână pe o suprafață fixă şi aspră de ecuație:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (2.36)$$

în sistemul de referință Oxyz.

Coeficientul de frecare la alunecare "μ" se consideră acelaşi în toate punctele suprafeței. Asupra punctului acționează un sistem de forțe a cărui rezultantă este $\bar{R}$.

Se urmărește determinarea condițiile de echilibru ale punctului.

a) Considerații geometrice

Inițial, asupra punctului acționează numai componenta normală $\bar{P}$ a rezultantei $\bar{R}$ a forțelor date. Punctul va rămâne în repaus. Din partea suprafeței apare reacțiunea normală $\bar{N}$ care respectă condiția vectorială:

$$\bar{P} + \bar{N} = 0\,, \qquad (2.37)$$

de unde rezultă:

$$N = P \qquad (2.38)$$

În continuare asupra punctului acționează componenta tangențială $\overline{F}$ a rezultantei $\overline{R}$ cu valori progresive începând de la zero. Punctul rămâne în repaus atâta timp cât forța $\overline{F}$ nu depăşeşte o valoare maximă $\overline{F}_{max}$:

$$F \le F_{max} \tag{2.39}$$

Înseamnă că suprafața acționează asupra punctului cu o forță de legătură numită *forță de frecare* egală ca valoare cu forța $\overline{F}$ şi direct opusă ei, fiind adevărată relația:

$$\overline{F} + \overline{T} = 0, \tag{2.40}$$

de unde:

$$T = F \tag{2.41}$$

În cazul echilibrului la limită avem:

$$T_{max} = F_{max} \tag{2.42}$$

Conform legilor frecării coloumbiene:

$$T_{max} = \mu N \tag{2.43}$$

Luând în considerare relațiile (2.41), (2.42) şi (2.43), relația (2.39) devine:

$$T \le \mu N \tag{2.44}$$

Prin urmare, condițiile de echilibru ale punctului pe o suprafață aspră sunt:

$$\overline{R} + \overline{N} + \overline{T} = 0; \qquad T \le \mu N \tag{2.45}$$

În cazul echilibrului la limită avem:

$$\overline{R}_{max} + \overline{R}_{1max} = 0;\ \overline{R}_{max} = \overline{P} + \overline{F}_{max};\ \overline{R}_{1max} = \overline{N} + \overline{T}_{max} \tag{2.46}$$

Din figura 2.6 rezultă valoarea unghiului "φ" corespunzătoare echilibrului la limită:

$$tg\varphi = \frac{T_{max}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu;\ tg\varphi = \mu \tag{2.47}$$

Unghiul φ se numeşte *unghi de frecare* şi se defineşte ca fiind unghiul a cărui tangentă este egală cu coeficientul frecării de alunecare μ.

Presupunând că păstrăm constantă $\overline{F}_{max}$, dar o rotim în planul tangent, suportul comun al vectorilor $\overline{R}_{max}$ şi $\overline{R}_{1max}$ va genera suprafaţa unui con cu două pânze de unghi la vârf "2φ" şi având axa de simetrie normala la suprafaţa de sprijin, con numit *con de frecare*.

Punctul M se va afla în echilibru dacă $\alpha \le \varphi$, adică atunci când suportul rezultantei $\overline{R}$ se va găsi în interiorul conului de frecare.

b)Expresii analitice

Pentru a afla condiţia analitică de echilibru, determinăm unghiul ascuţit dintre suportul rezultantei $\overline{R}$ şi vectorul $\overline{n}$ normal în M la suprafaţa de sprijin:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{R}\cdot\overline{n}\right|}{\left|\overline{R}\right|\left|\overline{n}\right|} = \frac{\left|R_x\frac{\partial f}{\partial x}+R_y\frac{\partial f}{\partial y}+R_z\frac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \tag{2.48}$$

Condiţia $T \le \mu N$ împărţită cu N conduce la:

$$tg\alpha \le \mu;\ \mu = tg\varphi \tag{2.49}$$

sau:

$$\alpha \le \varphi \tag{2.50}$$

Aplicând relaţiei (2.50) operatorul cosinus obţinem:

$$\cos\alpha \ge \cos\varphi \tag{2.51}$$

Întrucât $\cos\varphi = 1/\sqrt{1+tg^2\varphi}$, condiţia (2.51), pe baza relaţiei (2.48), devine:

$$\frac{\left|R_x\frac{\partial f}{\partial x}+R_y\frac{\partial f}{\partial y}+R_z\frac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{2.52}$$

Dacă este respectată condiția analitică (2.52), punctul va rămâne în echilibru pe suprafața aspră de ecuație f(x, y, z)=0 şi coeficient de frecare la alunecare μ, sub acțiunea sistemului de forțe cu rezultanta $\overline{R}(R_x, R_y, R_z)$.

Echilibrul are loc pe un domeniu limitat de curba de ecuații:

$$f(x, y, z)=0 \; ; \; \frac{|\overline{R}\cdot\overline{n}|}{|\overline{R}||\overline{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (2.53)$$

2.8. Echilibrul punctului material obligat să rămână pe o curbă aspră

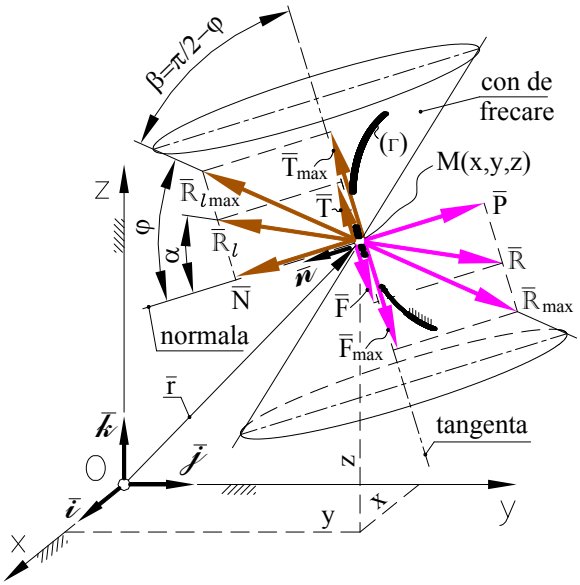


Fig. 2.7

În figura 2.7 este reprezentat un punct material obligat să rămână pe curba aspră de ecuații parametrice:

x = x(u); y = y(u); z = z(u) (2.54)

şi coeficient de frecare la alunecare μ în toate punctele curbei. Asupra punctului acționează un sistem de forțe date a cărui rezultantă este $\overline{R}$. Se cere determinarea condițiilor de echilibru ale punctului.

a) Considerații geometrice

Reluând considerațiile geometrice din paragraful 2.7, rezultă că şi în acest caz condițiile de echilibru sunt:

$$\overline{R}+\overline{N}+\overline{T}=0 \; ; \quad T\le\mu N \qquad (2.55)$$

În cazul la limita echilibrului avem:

$$\overline{R}_{max}+\overline{R}_{1\,max}=0 \; ; \; \overline{R}_{max}=\overline{P}+\overline{F}_{max} \; ; \; \overline{R}_{1\,max}=\overline{N}+\overline{T}_{max} \qquad (2.56)$$

Păstrând constantă F_{max} şi rotind vectorul $\overline{P}$ în jurul tangentei la curbă, suportul comun al vectorilor $\overline{R}_{max}$ şi $\overline{R}_{1\,max}$ generează un con circular drept cu

două pânze numit *con complementar de frecare* cu unghiul la vârf $\pi - 2\varphi$ şi axa de simetrie tangenta la curbă. Punctul rămâne în echilibru dacă suportul rezultantei forţelor date se găseşte în afara conului $(\beta \geq \pi/2 - \varphi)$.

b)Expresii analitice

Condiția $T \leq \mu N$ este echivalentă cu:

$$\alpha \leq \varphi \tag{2.57}$$

Notăm cu β unghiul ascuțit dintre suportul rezultantei $\overline{R}$ şi tangenta la curbă. Se poate scrie:

$$\cos\beta = \frac{\left|\overline{R}\cdot\overline{\tau}\right|}{\left|\overline{R}\right|\left|\overline{\tau}\right|} = \frac{\left|R_x\frac{\partial x}{\partial u} + R_y\frac{\partial y}{\partial u} + R_z\frac{\partial z}{\partial u}\right|}{\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}} \tag{2.58}$$

Dar:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \tag{2.59}$$

Înlocuind (2.59) în (2.58) şi aplicând inegalității funcția sinus obținem:

$$\cos\beta \leq \sin\varphi \tag{2.60}$$

sau:

$$\frac{\left|R_x\frac{\partial x}{\partial u} + R_y\frac{\partial y}{\partial u} + R_z\frac{\partial z}{\partial u}\right|}{\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{2.61}$$

Dacă este îndeplinită condiția (2.61), punctul nu alunecă. Şi în acest caz echilibrul are loc pe un interval ale cărui limite rezultă din ecuația:

$$\frac{\left|\overline{R}\cdot\overline{\tau}\right|}{\left|\overline{R}\right|\left|\overline{\tau}\right|} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{2.62}$$

Observații privind frecarea de alunecare

Forțele de frecare de alunecare, după Coulomb, sunt forțe care se opun strivirii asperităților suprafețelor de contact dintre corpurile care au tendința sau se deplasează relativ unul față de celălalt.

Experienţele dovedesc faptul că "μ" nu este, în general, o mărime constantă chiar şi în cazul frecărilor uscate. Coeficientul frecării de alunecare "μ" scade neliniar cu creşterea vitezei. Fenomenul este întâlnit, de exemplu la frânarea autovechiculelor. Atunci când roţile autovehiculelor care circulă cu mare viteză sunt blocate cu ajutorul saboţilor şi ele patinează, coeficientul de frecare la alunecare este mic (deoarece viteza de alunecare este egală cu viteza autovehiculului), oprirea făcându-se pe o distanţă mare. Dacă însă roţile nu sunt complet blocate, ele rostogolindu-se şi alunecând în acelaşi timp, coeficientul de frecare este mai mare (deoarece viteza de alunecare este mai mică decât viteza autovehiculului), în acest caz oprirea făcându-se pe o distanţă mai mică.

Valoarea coeficientului de frecare de alunecare pentru corpurile aflate în repaus se numeşte *coeficient de aderenţă* (μ_0) şi este mai mare decât coeficientul de frecare pentru corpurile aflate în mişcare relativă, numit *coeficient de frecare dinamic* (μ).

Forţa de frecare de alunecare, pentru valori mai mari ale reacţiunii normale "N", nu mai variază liniar cu acesta, ci creşte lent cu "N".

Frecarea mai depinde de temperatura corpurilor (scăzând cu creşterea acesteia), de timpul cât corpurile rămân în contact, precum şi de fineţea de prelucrare a suprafeţelor. Este surprinzător că la un momnet dat, fineţea la polizare a suprafeţelor conduce la apariţia forţelor de adeziune intramoleculare care în acest caz devin importante.

Introducerea unui lubrifiant între suprafeţele de contact are ca urmare reducerea frecării de alunecare, dar problema iese din domeniul frecării uscate şi necesită o tratare pe baza legilor hidrodinamicii.

3. FORŢE SI MOMENTE

3.1. Caracterul de vector alunecător al forţei aplicată unui rigid

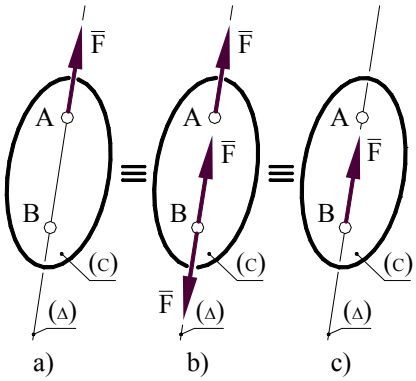


Fig. 3.1

Se consideră în figura 3.1a o forţă $\overline{F}$ acţionând pe suportul (Δ), în punctul A asupra rigidului (C). Se admite că doua forţe egale în modul, cu acelaşi suport şi sensuri contrarii ce acţionează asupra unui rigid au efect nul asupra acestuia şi ca urmare pot fi introduse sau suprimate. Într-un punct oarecare B de pe suportul forţei se plasează două forte $\overline{F}$ si $-\overline{F}$ egale în modul şi de sensuri contrarii (fig.3.1b). Sistemul iniţial format doar dintr-o singură forţă se transformă intr-unul echivalent format din trei forţe. Se suprimă forţa $\overline{F}$ aplicată in A şi forţa $-\overline{F}$ aplicată în B, obţinându-se un sistem echivalent format dintr-o singură forţă aplicată în B (fig.3.1c). Comparând figurile 3.1c şi 3.1a se constată că forţa $\overline{F}$ are acelaşi efect fie că este aplicată în A fie că este aplicată în B. De aici concluzia ca forţa care acţionează asupra unui rigid are caracter de vector alunecător.

3.2. Momentul unei forţe în raport cu un punct

În figura 3.2 o forţă $\overline{F}$ acţionează în punctul A asupra unui solid rigid (C). Fie O un punct al acestuia.

Se numeşte *moment al forţei* $\overline{F}$ în raport cu punctul O sau *momentul polar* al forţei faţă de O un vector cu punctul de aplicaţie în O egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţei în raport cu O şi forţa dată:

$$\overline{M}_O\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F} \tag{3.1}$$

Modulul momentului polar este:

$$\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right| = \left|\overline{r}\right|\left|\overline{F}\right|\sin\alpha = Fr\sin\alpha = Fd\,, \tag{3.2}$$

adică modulul momentului polar este egal cu produsul modulul forței şi brațul forței (distanța de la punctul O la suportul forței).

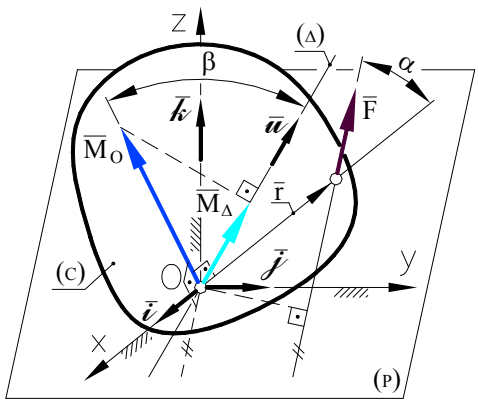


Fig. 3.2

Din relațiile (3.1) si (3.2) rezultă:

a) Vectorul moment polar este plasat pe normala în pol la planul determinat de pe suportul forței şi pol, având sensul cel de înaintare al unui şurub drept rotit în sensul în care forța tinde să rotească rigidul în jurul acestei normale.

b) Față de orice punct de pe suportul forței momentul ei este nul.

c) Momentul polar este invariant la alunecare forței pe suportul sau şi fată de punctele situate pe o paralelă la dreapta suport.

Alegând un sistem de referință Oxyz legat de corp cu originea în pol şi notând cu M_x, M_y, M_z, componentele carteziene ale momentului polar, cu x, y, z coordonatele punctului de aplicație al forței şi cu F_x, F_y, F_z componentele carteziene ale forței în acest reper, relația (3.1) poate fi scrisă dezvoltat:

$$M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \tag{3.3}$$

de unde, prin indentificarea coeficienților versorilor deducem proiecțiile momentului polar:

$$M_x = yF_z - zF_y\,;\quad M_y = zF_x - xF_z\,;\quad M_z = xF_y - yF_x \tag{3.4}$$

şi în continuare valoarea lui:

$$\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right| = M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{3.5}$$

Orientarea vectorului moment polar este dată de cosinusurile directoare:

$$\cos \sphericalangle\left(\overline{M}_O, O_x\right) = \frac{M_x}{M_O};\ \cos \sphericalangle\left(\overline{M}_O, O_y\right) = \frac{M_y}{M_O};\ \cos \sphericalangle\left(\overline{M}_O, O_z\right) = \frac{M_z}{M_O} \tag{3.6}$$

3.3. Momentul unei forţe în raport cu o axă

În aceeaşi figură 3.2 mai este reprezentată o axă (Δ) care trece prin polul O şi versorul acestei axe $\overline{u}$.

Se numeşte *moment al forţei* $\overline{F}$ *în raport cu axa (Δ) sau moment axial al fortei* $\overline{F}$ faţă de axa (Δ) proiecţia pe axă a momentului forţei calculat în raport cu un punct oarecare de pe axa. În cazul de faţă:

$$M_\Delta\left(\overline{F}\right) = \left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right| \cos\alpha \tag{3.7}$$

$$M_\Delta\left(\overline{F}\right) = \overline{M}_O \cdot \overline{u} = \left(\overline{r} \times \overline{F}\right) \cdot \overline{u} = \left(\overline{r}, \overline{F}, \overline{u}\right) \tag{3.8}$$

Aşadar, momentul unei forţe în raport cu o axă se poate exprima prin produsul mixt dintre vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţei, vectorul forţă şi versorul axei.

Din relaţiile de definiţie rezultă:

a) Alegerea punctului de pe axă faţă de care se calculează momentul este arbitrară;

b) Valoarea momentului axial al unei forţe nu se schimbă când forţa se deplasează pe suportul său;

c) Momentul axial este nul dacă suportul forţei şi axa sunt coplanare, adică dacă sunt paralele sau concurente;

Expresiile (3.4) reprezintă momentele forţei $\overline{F}$ în raport cu axele reperului Oxyz.

3.4. Cuplu de forţe

Două forţe paralele, egale în modul, având sensuri opuse şi care acţionează pe suporturi diferite formează un *cuplu de forţe* (fig. 3.3).

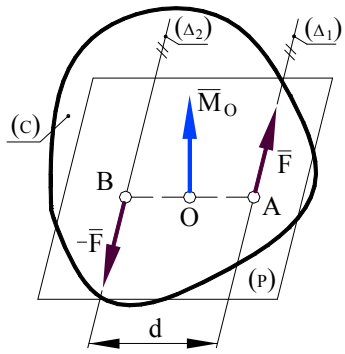


Fig. 3.3

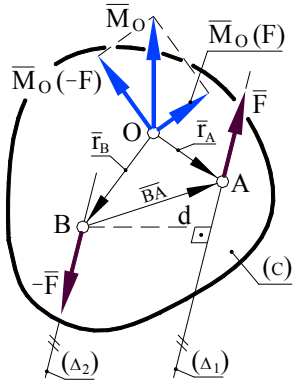


Fig. 3.4

Cuplul de forțe se reprezintă printr-un vector $\overline{M}_O$, numit *momentul cuplului*, plasat pe normala la planul forțelor (planul cuplului) şi dirijat în sensul de înaintare al şurubului drept rotit în sensul în care forțele tind să rotească rigidul, având modulul egal cu produsul dintre modulul uneia dintre forțe şi brațul cuplului (distanța dintre suporturile forțelor):

$$\overline{M}_O = F \cdot d \tag{3.9}$$

În figura 3.4 un cuplu de forte $\overline{F}$ şi $-\overline{F}$ acționează în punctele A, respectiv B asupra rigidului (C). Calculăm suma momentelor celor doua forțe în raport cu un punct O al corpului:

$$\overline{M}_O = \overline{M}_O\left(\overline{F}\right) + \overline{M}_O\left(-\overline{F}\right) = \bar{r}_A \times \overline{F} + \bar{r}_B\left(-\overline{F}\right) = \left(\bar{r}_A - \bar{r}_B\right) \times \overline{F} = \overline{BA} \times \overline{F} \tag{3.10}$$

Înseamnă că suma momentelor celor două forțe nu depinde de poziția punctului O, este normală pe planul cuplului şi are modulul:

$$\left|\overline{M}_O\right| = BA \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot d \tag{3.11}$$

Din compararea relațiilor (3.11) şi (3.9) rezultă că suma momentelor celor doua forțe este chiar momentul cuplului.

3.5. Operații elementare de echivalență

Cele mai simple operații aplicate sistemelor de forțe care nu modifică efectul lor mecanic asupra solidului rigid se numesc *operații elementare de echivalență*. Acestea sunt:

1. Deplasarea punctului de aplicaţie al forţei pe suportul ei;
2. Introducerea sau suprimarea a doua forţe egale având acelaşi suport şi sensuri contrarii;
3. Înlocuirea a două forţe concurente prin rezultanta lor, conform regulii paralelogramului;
4. Descompunerea unei forţe după două direcţii concurente şi coplanare cu suportul forţei în acelaşi punct, după aceeaşi regulă a paralelogramului;
5. Înlocuirea unui cuplu de forţe cu momentul cuplului;

3.6. Reducerea unui sistem de forţe aplicate unui rigid

3.6.1 Torsor de reducere

Fie un solid rigid notat cu (C) supus acţiunii unui sistem de "n" forţe $\overline{F}_i\left(i=1\div n\right)$ aplicate în punctele $A_i\left(i=1\div n\right)$ (fig.3.5a), poziţionate faţă de un sistem de referinţă cartezian Oxyz prin vectorii de pozitie $\overline{r}_i\left(i=1\div n\right)$.

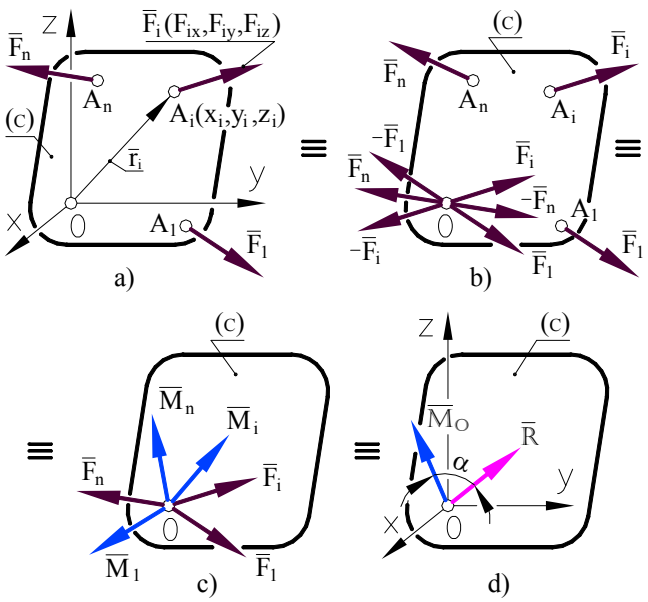


Fig. 3.5

Se urmăreşte reducerea sistemului de forţe, adică înlocuirea lui cu cel mai simplu sistem posibil echivalent cu cel iniţial.

În acest scop aplicăm operaţiile de echivalenţa. Se plasează într-un punct O oarecare al corpului perechile de forţe $\overline{F}_i$ şi $-\overline{F}_i$ $(i=1\div n)$. Sistemul obţinut (fig. 3.5b) este echivalent cu cel iniţial. Cuplurile de forte $\overline{F}_i$ şi $-\overline{F}_i$ $(i=1\div n)$ aplicate in A_i şi respectiv O se înlocuiesc cu momentele lor:

$$\overline{M}_{Oi} = \overline{r}_i \times \overline{F}_i \tag{3.12}$$

Sistemul de 3n forțe din fig. 3.5b se transformă într-un sistem de 2n vectori, n vectori forță aplicați în O şi n vectori moment aplicați tot in O (fig. 3.5c). Cele două tipuri de vectori concurenți se înlocuiesc cu vectorii rezultanți corespunzători: vectorul rezultant (forța rezultantă) egal cu suma vectorială a celor n forțe şi momentul rezultant egal cu suma vectorială a celor n momente (fig. 3.5d):

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \tag{3.12}$$

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i \tag{3.13}$$

Deoarece au fost aplicate operațiile elementare de echivalență sistemele de forțe din figurile 3.5a-3.5d sunt echivalente între ele. Astfel sistemul inițial de forțe s-a transformat în sistemul echivalent din figura 3.5d format din două elemente vectoriale, vectorul rezultant şi momentul rezultant, care determină *torsorul de reducere* $\overline{\overline{\tau}}_O$ al sistemului de forțe în punctul O:

$$\left\{\overline{F}_i,\ i \div n\right\} \equiv \overline{\overline{\tau}}_O\left(\overline{F}_i,\ i \div n\right) \equiv \left\{\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i;\ \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i\right\} \tag{3.14}$$

Se observă că momentul rezultant reprezintă suma momentelor polare ale forțelor în raport cu polul O.

Se consideră un sistem de referință Oxyz, legat de corp, cu originea în polul de reducere, în care coordonatele punctelor A_i de aplicație ale forțelor sunt: x_i, y_i, z_i iar proiecțiile forțelor: F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}. Forma analitică a relațiilor (3.12) şi (3.13) este:

$$R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k} = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\bar{i} + F_{iy}\bar{j} + F_{iz}\bar{k}\right) \tag{3.15}$$

$$M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} = \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}, \tag{3.16}$$

de unde prin egalarea coeficienților versorilor deducem proiecțiile pe axele reperului Oxyz ale vectorului rezultant:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\ ,\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\ ,\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \tag{3.17}$$

şi ale momentului rezultant:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right); M_y = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right); M_z = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) \tag{3.18}$$

Modulele celor doi vectori sunt date de relațiile:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{3.19}$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{3.20}$$

Orientarea vectorilor rezultanți se obține prin cosinusurile directoare:

$$\cos\sphericalangle\left(\overline{R}, O_x\right) = \frac{R_x}{R};\ \cos\sphericalangle\left(\overline{R}, O_y\right) = \frac{R_y}{R};\ \cos\sphericalangle\left(\overline{R}, O_z\right) = \frac{R_z}{R} \tag{3.21}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overline{M}_O, O_x\right) = \frac{M_x}{M_O};\cos\sphericalangle\left(\overline{M}_O, O_y\right) = \frac{M_y}{M_O};\cos\sphericalangle\left(\overline{M}_O, O_z\right) = \frac{M_z}{M_O} \tag{3.22}$$

3.6.2. Proprietățile elementelor torsorului de reducere

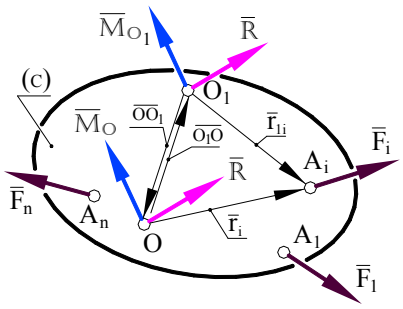


Fig. 3.6

1. Vectorul rezultant $\overline{R}$ este un invariant al sistemului de forțe dat în raport cu polul de reducere. Demonstrația este imediată: $\overline{R}$ se obține prin metoda poligonului forțelor, metodă independentă de polul ales.

2. Vectorul moment rezultant $\overline{M}_O$ variază, în general, la schimbarea polului de reducere. Fie O_1 noul pol de reducere (fig.3.6)

Utilizând egalitatea:

$$\overline{r}_{1i} = \overline{r}_i + \overline{O_1O}\,, \tag{3.23}$$

pe baza relației (3.13) se obține:

$$\overline{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{r}_{1i} \times \overline{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{r}_i + \overline{O_1O}\right) \times \overline{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{r}_i \times \overline{F}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{O_1O} \times \overline{F}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{r}_i \times \bar{F}_i \right) + \overline{O_1O} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \right) = \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{R}$$

Prin urmare, legea de variație a vectorului moment rezultant $\overline{M}_O$ la schimbarea polului este:

$$\overline{M}_{O_1} = \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{R} = \overline{M}_O - \overline{O_1O} \times \overline{R} \qquad (3.24)$$

3. Produsul scalar dintre vectorul rezultant şi vectorul moment rezultant este o mărime constantă care se numeşte *trinom invariant*. Într-adevăr, prin înmulțirea scalară cu $\overline{R}$ a relației (3.24) se obține:

$$\overline{M}_{O_1} \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R} + \left(\overline{O_1O} \times \overline{R} \right) \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R}, \quad \text{deoarece } \left(\overline{O_1O} \times \overline{R} \right) \cdot \overline{R} = 0,$$

$$\overline{M}_{O_1} \cdot \overline{R} = \overline{M}_O \cdot \overline{R} = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z = \text{constant} \qquad (3.25)$$

4. Dacă torsorul sistemului de forțe în raport cu un punct este nul, rămâne nul pentru orice alt punct de reducere. În acest caz solidul rigid este în echilibru. Demonstrația este imediată deoarece dacă în relatia (3.24) $\overline{R} = 0$ şi $\overline{M}_O = 0$ rezultă că şi $\overline{M}_{O_1} = 0$.

5. Dacă $\overline{R} = 0$ atunci vectorul moment rezultant este invariant fața de polul de reducere. Relația (3.24) devine $\overline{M}_{O_1} = \overline{M}_O$ când $\overline{R} = 0$. În acest caz $\overline{M}_O$ are caracter vector liber.

6. Pentru un acelaşi sistem de forțe, proiecția momentelor rezultante în raport cu cele două puncte O şi O_1 pe dreapta ce unește cele două puncte este constantă. Fie $\bar{u}$ versorul directie $\overline{O_1O}$. Relația (3.24) înmulțită scalar cu $\bar{u}$ conduce la:

$$\overline{M}_{O_1} \cdot \bar{u} = \overline{M}_O \cdot \bar{u} + \left(\overline{O_1O} \times \overline{R} \right) \cdot \bar{u} = \overline{M}_O \cdot \bar{u}, \text{ deoarece } \left(\overline{O_1O} \times \overline{R} \right) \cdot \bar{u} = 0$$

3.6.3. Torsorul minimal. Axă centrală

În urma reducerii unui sistem de forțe într-un punct al unui rigid se obține un torsor compus din vectorul rezultant $\overline{R}$ şi vectorul moment rezultant $\overline{M}_O$ care închid între direcțiile lor un unghi α. Dacă α = 0 sau α = π, cei doi vectori sunt coliniari. Dacă cei doi vectori sunt coliniari, torsorul sistemului de forțe se numeşte *torsor minimal* (*rasucitor, dinam, surub*). Efectul mecanic al unui astfel de torsor asupra solidului rigid este o mişcare de rototranslație în lungul şi în jurul suportului comun al celor doi vectori.

Se demonstrează că locul geometric al punctelor în raport cu care sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal este o dreaptă numită *axa centrală* a sistemului de forțe.

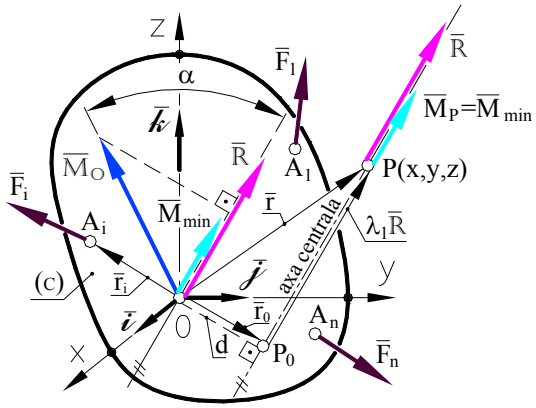


Fig. 3.7

Fie sistemul de forțe $\bar{F}_i\,(i=1\div n)$ ce acționează în punctele $A_i\,(i=1\div n)$ asupra rigidului (C) din figura 3.7. Pentru determinarea axei centrale se consideră cunoscut torsorul de reducere al sistemului de forte dat în polul O.

Presupunem că P(x,y,z) este un punct curent al axei centrale. Prin definiție $\bar{R}$ si $\bar{M}_P$ sunt coliniari, deci:

$$\bar{R}\times\bar{M}_P=0 \tag{3.26}$$

Conform legii de variatie a momentului rezultant la schimbarea polului de reducere putem scrie:

$$\bar{M}_P=\bar{M}_O-\overline{OP}\times\bar{R}=\bar{M}_O-\bar{r}\times\bar{R} \tag{3.27}$$

Înlocuind (3.27) în (3.26) se obține:

$$\bar{R}\times\left[\bar{M}_O+\left(-\bar{r}\times\bar{R}\right)\right]=0 \text{ sau } \bar{R}\times\bar{M}_O+\bar{R}\times\left(\bar{R}\times\bar{r}\right)=0 \tag{3.28a,b}$$

Aplicând metoda lui Gibbs (Gibbs, Josiah Willard, 1839-1903) pentru dezvoltarea dublului produs vectorial, rezultă o ecuație vectoriala de gradul I în $\bar{r}$, care reprezintă ecuația locului geometric căutat:

$$\bar{R}\times\bar{M}_O+\left(\bar{R}\cdot\bar{r}\right)\bar{R}-R^2\bar{r}=0 \tag{3.29}$$

Fie P_0 un punct particular al locului geometric căutat, având vectorul de pozitie $\bar{r}_0$, ce satisface condiția $\bar{R}\cdot\bar{r}_0=0$ $\left(\bar{R}\perp\bar{r}_0\right)$. Impunând această condiție în (3.28b) se obține poziția punctului P_0:

$$\bar{R}\times\bar{M}_O-R^2\bar{r}_0=0\,,\ \text{de unde}\ \ \bar{r}_0=\frac{\bar{R}\times\bar{M}_O}{R^2} \tag{3.30a,b}$$

Se scade (3.30a) din (3.29):

$$\left(\overline{R}\cdot\bar{r}\right)\overline{R}=R^2\left(\bar{r}-\bar{r}_0\right)\quad\text{sau}\quad \bar{r}-\bar{r}_0=\frac{\left(R\cdot\bar{r}\right)}{R^2}\overline{R}\qquad(3.31),\ (3.32)$$

Dacă se notează

$$\lambda_1=\overline{R}\cdot\bar{r}/R^2,\qquad(3.33)$$

se obține:

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\lambda_1\overline{R}\qquad(3.34)$$

Relația (3.34) este soluția generală a ecuației vectoriale (3.28b) care atestă existența locului geometric căutat, reprezentând *ecuația vectorială* a axei centrale. Se observă că dreapta trece prin punctul P_0 ($\bar{r}_0$) şi este paralelă cu $\overline{R}$. Distanța ei față de originea sistemului de referința este:

$$d=\left|\bar{r}_0\right|=\frac{\left|\overline{R}\times\overline{M}_O\right|}{R^2}=\frac{R\cdot M_O\cdot\sin\alpha}{R^2}=\frac{M_O\cdot\sin\alpha}{R}\qquad(3.35)$$

Ecuațiile analitice (carteziene) ale axei centrale se determină fie proiectând ecuația vectoriala (3.34) pe axele reperului Oxyz fie rescriind condiția (3.26) sub forma:

$$\overline{M}_P=\lambda\overline{R},\qquad(3.36)$$

în care se inlocuieste (3.27):

$$\overline{M}_O-\bar{r}\times\overline{R}=\lambda\overline{R}\qquad(3.37)$$

Ecuația (3.37) proiectată pe axele sistemului de referință, este echivalentă cu un sistem de trei ecuatii scalare:

$$\begin{cases}M_x-\left(yR_z+zR_y\right)=\lambda R_x\\ M_y-\left(zR_x+xR_z\right)=\lambda R_y\\ M_z-\left(xR_y+yR_x\right)=\lambda R_z\end{cases}\qquad(3.38)$$

de unde, eliminând parametrul λ, rezultă ecuațiile axei centrale dată ca intersecție a două plane:

$$\frac{M_x-yR_z+zR_y}{R_x}=\frac{M_y-zR_x+xR_z}{R_y}=\frac{M_z-xR_y+yR_x}{R_z}\qquad(3.39)$$

Momentul rezultant obținut prin reducerea sistemului de forțe în raport cu un punct “P” aparținând axei centrale se poate calcula multiplicând scalar (3.27) cu versorul lui $\overline{R}$:

$$\overline{M}_P \cdot \frac{\overline{R}}{R} = \overline{M}_O \cdot \frac{\overline{R}}{R} + \left(\overline{PO} \times \overline{R}\right) \cdot \frac{\overline{R}}{R} \;;\; \left(\overline{PO} \times \overline{R}\right) \cdot \frac{\overline{R}}{R} = 0 \;;\; M_P = \overline{M}_O \cdot \frac{\overline{R}}{R} \quad (3.40)$$

Se constată că acest moment este acelaşi în toate punctele axei centrale şi este egal cu proiecţia momentului rezultant din polul O pe direcţia vectorului rezultant, adică momentul rezultant minim posibil:

$$M_P = M_{min} = M_O \cdot \cos\alpha \quad (3.41)$$

Putem calcula momentul minim cu ajutorul componentelor carteziene ale elementelor torsorului de reducere în O:

$$M_{min} = M_P = \frac{M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} \quad (3.42)$$

Această valoare este *invariantă* deoarece este raportul a doi invarianti: trinomul invariant şi modulul vectorului rezultant. Aşadar în raport cu punctele axei centrale sistemul de forţe este echivalent cu un torsor minimal având ca elemente vectorul rezultant şi vectorul moment minim:

$$\overline{\overline{\tau}}_O\left(F_i, i \div n\right) \equiv \overline{\overline{\tau}}_{min} \equiv \left\{ \overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i ;\; \overline{M}_{min} = \overline{M}_P = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{R}}{R^2} \overline{R} \right\} \quad (3.43)$$

Observaţii:

1. Dacă $\overline{M}_P = \overline{M}_{min} = 0$, rezultă $\overline{M}_O \cdot \overline{R} / R = 0$, adică $\overline{M}_O \perp \overline{R}$, şi sistemul de forţe se reduce, în raport cu punctele axei centrale, la o rezultantă unică.

2. Pentru un sistem dat de forţe, oriunde am lua polul de reducere rămân invariante: vectorul rezultant, trinomul invariant, momentul minim si axa centrală.

3.6.4. Teorema lui Varignon

Fie $\overline{M}_{min}$ şi $\overline{R}$ elementele torsorului minimal în punctul P de pe axa centrală (fig. 3.7), iar O un punct oarecare. Deci, $M_P = \overline{M}_{min}$ şi ţinând cont că $\overline{OP} = \bar{r}$, relaţia (3.27) se poate pune sub forma:

$$\overline{M}_O = \overline{M}_{min} + \bar{r} \times \overline{R} \quad (3.44)$$

care se numeşte *forma canonică* sau *invariantă* a axei centrale.

În cazul în care $\overline{M}_{min} = 0$, adică pentru sistemele de forțe ce se reduc la o rezultantă unică față de punctele axei centrale, din (3.44) rezultă:

$$\overline{M}_O = \bar{r} \times \overline{R} \tag{3.45}$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{r}_i \times \overline{F}_i \right) = \bar{r} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \right), \tag{3.46}$$

relație ce exprima *teorema lui Varignon* (Varignon, Pierre, 1654-1722) conform căreia: *momentul rezultant al unui sistem de forțe care respectă condiția* $\overline{M}_{min} = 0$*, în raport cu un pol O, este egal cu momentul rezultantei sistemului plasată pe axa centrală, în raport cu acelaşi pol O.*

În particular, sistemele de forțe concurente, coplanare sau paralele respectă teorema lui Varignon.

3.6.5. Cazuri de reducere a sistemelor de forțe

Luând în considerare elementele torsorului de reducere într-un punct, al sistemelor de forțe oarecare, pot apărea următoarele cazuri:

Cazul I: $\overline{R} \neq 0$ si $\overline{M}_O \neq 0$. Se pot distinge două situații determinate de trinomul invariant:

a) $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$, cei doi vectori sunt perpendiculari şi sistemul de forțe se reduce la o *rezultanta unică* în raport cu punctele axei centrale. Axa centrală este situată într-un plan normal pe $\overline{M}_O$, la distanța d de punctul O (fig. 3.8):

$$d = \frac{M_O}{R} \tag{3.47}$$

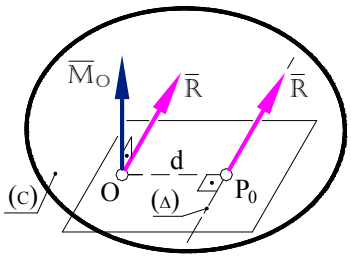


Fig. 3.8

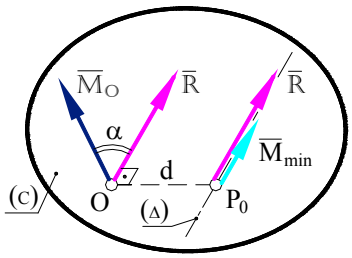


Fig. 3.9

b) $\overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal în raport cu punctele axei centrale. Axa centrală, paralelă cu suportul vectorului rezultant, va fi plasată la distanța:

$$d = \frac{M_0 \cdot \sin\alpha}{R} \tag{3.48}$$

măsurată din O perpendicular pe planul vectorilor $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$, în sensul produsului vectorial $\overline{R} \times \overline{M}_O$ (fig. 3.9). Este cazul cel mai general de reducere a unui sistem de forte dat.

Cazul II: $\overline{R} \neq 0$ şi $\overline{M}_O = 0$, sistemul reducându-se la o rezultantă unică $\overline{R}$, suportul ei fiind chiar axa centrală care trece prin O.

Cazul III: $\overline{R} = 0$ şi $\overline{M}_O \neq 0$, sistemul este echivalent cu un cuplu rezultant, situat într-un plan perpendicular pe $\overline{M}_O$.

Cazul IV: $\overline{R} = 0$ şi $\overline{M}_O = 0$, sistemul se reduce la un torsor nul, adică solidul rigid asupra căruia acţionează sistemul de forţe este în echilibru.

3.7. Reducerea sistemelor de forţe coplanare

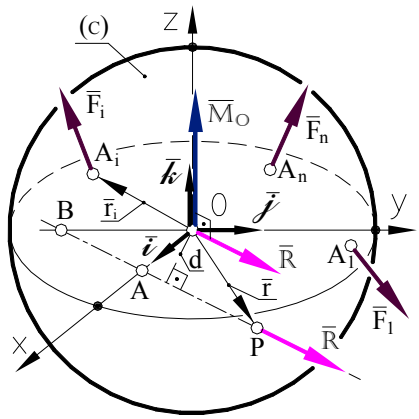


Fig. 3.10

În figura 3.10 este reprezentat un solid rigid (C) solicitat de un sistem de forţe coplanare $\overline{F}_i (i = 1 \div n)$ în punctele $A_i (i = 1 \div n)$. Sistemul de referinţă se alege astfel încat planul xOy să coincidă cu planul forţelor. Ca urmare:

$$F_{iz} = 0;\ z_i = 0 \tag{3.49}$$

În raport cu punctul O sistemul de forţe coplanare se reduce la un torsor $(\overline{R}, \overline{M}_O)$ ale cărui elemente se determină analitic cu relaţiile (3.17) şi (3.18) tinand seama de (3.49):

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\ ;\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\ ;\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \tag{3.50}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0\ ;\ M_y = \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{iy} - y_i F_{iz}) = 0\ ;\ M_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \tag{3.51}$$

Din relaţiile (3.50) şi (3.51) deducem că vectorul rezultant este situat în planul forţelor, iar vectorul moment rezultant este perpendicular pe acest plan. Este evident că,

$$\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0 \tag{3.52}$$

şi

$$\overline{M}_{min} = 0 \tag{3.53}$$

Ecuațiile axei centrale (3.39), pe baza relațiilor (3.50) – (3.51) iau forma:

$$\frac{zR_y}{R_x} = \frac{-zR_x}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z} \tag{3.54}$$

sau

$$\begin{cases} z = 0 \\ M_z - xR_y + yR_x = 0 \end{cases} \tag{3.55}$$

Ecuațiile (3.55) reprezintă o dreaptă din planul xOy care intersectează axa Ox in punctul A de coordonate $x_A = M_z / R_y$, $y_A = 0$ şi axa Oy în punctul B de coordonate $x_B = 0$, $y_B = -M_z / R_x$. Relația (3.53) arată valabilitatea teoremei lui Varignon in cazul sistemelor de forțe coplanare.

Observatii:

1. Dacă $\overline{R} \neq 0$ şi $\overline{M}_O \neq 0$ sistemul de forțe coplanare se reduce la o rezultantă unică având ca suport axa centrală plasată la distanța $d = M_z / R$ față de O.

2. Dacă $\overline{R} \neq 0$ şi $\overline{M}_O = 0$ sistemul de forțe coplanare se reduce la o rezultantă unică al cărei suport trece chiar prin punctul 0.

3. Dacă $\overline{R} = 0$ si $\overline{M}_O \neq 0$ sistemul de forțe coplanare este echivalent cu un moment rezultant cu caracter de vector liber.

4. Dacă $\overline{R} = 0$ si $\overline{M}_O = 0$ sistemul de forte coplanare este echivalent cu un torsor nul, corpul asupra căruia acționeaza forțele fiind în echilibru.

3.8. Reducerea sistemelor de forte paralele. Centrul forțelor paralele

În figura 3.11 este prezentat un rigid (C) solicitat de un sistem spațial de "n" forțe paralele $\overline{F}_i$ (i=1,2,…,n) având versorul directiei comune $\overline{u}$, aplicate în punctele A_i (i=1,2,…,n). Se poate scrie:

$$\overline{F}_i = F_i \overline{u} \tag{3.56}$$

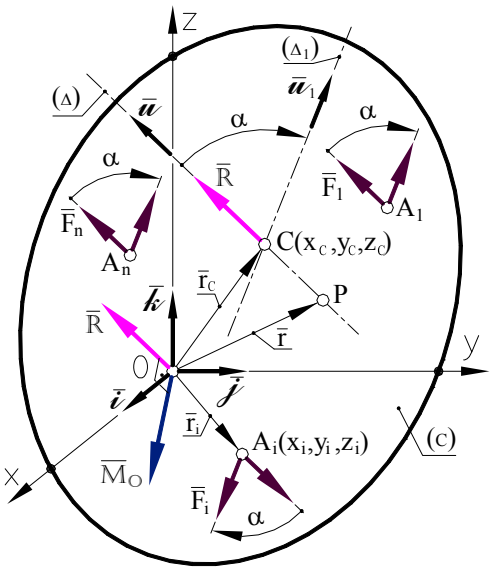


Fig. 3.11

În relația (3.56) scalarul F_i poate fi pozitiv sau negativ după cum forța $\overline{F}_i$ are acelaşi sens sau sens contrar cu versorul direcției comune $\overline{u}$ a forțelor.

Cu ajutorul relațiilor (3.12), (3.13) se pot determina elementele torsorului de reducere în O al sistemului de forțe paralele:

$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i=\sum_{i=1}^{n}F_i\overline{u}=\overline{u}\sum_{i=1}^{n}F_i=\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\right)\overline{u} \tag{3.57}$$

$$\overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{r}_i\times\overline{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{r}_i\times F_i\overline{u}\right)=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i\times\overline{u}=\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i\right)\times\overline{u} \tag{3.58}$$

Deoarece trinomul invariant este nul:

$$\overline{R}\cdot\overline{M}_O=\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\right)\overline{u}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i\right)\times\overline{u}\right]=0 \tag{3.59}$$

şi momentul minim este nul:

$$M_{min}=0 \tag{3.60}$$

Aşadar, sistemul de forțe paralele se reduce în raport cu punctele axei centrale la o rezultantă unică şi este aplicabilă teorema lui Varignon:

$$\overline{M}_O=\overline{r}\times\overline{R} \tag{3.61}$$

în care se înlocuiesc (3.57) şi (3.58), rezultând:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i\right)\times\overline{u}-\overline{r}\times\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\right)\overline{u}=0\text{, sau }\left[\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_iF_i-\left(\sum_{i=1}^{n}F_i\right)\overline{r}\right]\times\overline{u}=0 \tag{3.62}$$

Pentru ca relația (3.62) să fie indeplinită în cazul general, trebuie ca:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i - \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \bar{r} = \lambda' \bar{u} \tag{3.63}$$

în care λ' este un parametru scalar variabil.

Din (3.63) rezultă ecuația vectorială a axei centrale a sistemului de forțe paralele:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} - \frac{\lambda'}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \bar{u} \tag{3.64}$$

Se observă că pentru diferite valori ale parametrului λ' punctul curent P va ocupa diferite poziții pe axa centrală. Dând parametrului λ' valoarea particulara $\lambda' = 0$, se obține un punct care se noteaza cu C având vectorul de poziție:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{3.65}$$

Cu notația,

$$\lambda = -\frac{\lambda'}{\sum_{i} F_i} \tag{3.66}$$

şi tinând cont de (3.65), ecuația vectorială a axei centrale ia o formă mai simplă:

$$\bar{r} = \bar{r}_C + \lambda \bar{u} \tag{3.67}$$

Daca se rotesc forțele $\bar{F}_i (i = 1 \div n)$ în jurul punctelor de aplicație cu acelasi unghi α, in plane paralele, în acelasi sens, astfel încât ele să devină paralele cu o alta directie (Δ_1) de versor $\bar{u}_1$, ecuația vectorială va avea o expresie similară cu (3.67):

$$\bar{r} = \bar{r}_C + \lambda_1 \bar{u}_1 \tag{3.68}$$

Din relațiile (3.67) şi (3.68) rezultă ca axa centrală a sistemului de forțe paralele are acceaşi direcție cu direcția comună forțelor şi trece în permanența

printr-un punct C fix, numit *centrul forţelor paralele* definit de vectorul de pozitie (3.65), având coordonatele carteziene:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i};\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i};\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{3.69}$$

Proprietăţile centrului forţelor paralele

Centrul forţelor paralele este un punct special care se bucură de cateva proprietăţi importante:

1. Pozitia centrului forţelor paralele nu depinde de direcţia comună a forţelor.

Demonstraţia este evidentă deoarece în relaţia (3.65) nu apare versorul $\bar{u}$.

2. Poziţia centrului forţelor paralele nu se modifică dacă forţele sistemului işi modifică valoarea scalară cu un acelaşi factor. Să presupunem că în loc de $\bar{F}_i$ avem $\mu\bar{F}_i$. Atunci, relaţia (3.65) va rămâne neschimbată:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i (\mu F_i)}{\sum_{i=1}^{n} (\mu F_i)} = \frac{\mu \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i}{\mu \sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

3. Centrul forţelor paralele este un element intrinsec al sistemului de forţe dat, poziţia sa nemodificându-se faţă de punctele de aplicaţie ale forţelor, oricare ar fi sistemul de referintă adoptat. Fie O_1 originea noului sistem de referintă. Punctele de aplicaţie A_i ale forţelor paralele vor avea câte un nou vector de poziţie de forma:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_{10} + \bar{r}_1 \text{ , unde } \bar{r}_{10} = \overline{O_1 O}$$

Faţă de noul reper, poziţia centrului forţelor paralele va fi:

$$\bar{r}_{1C} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_{10} + \bar{r}_i) F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{\bar{r}_{10} \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)}{\sum_{i=1}^{n} F_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Prin urmare,

$$\bar{r}_{1C} = \bar{r}_{10} + \bar{r}_C$$

de unde rezultă ca vectorul de poziție al centrului forțelor paralele s-a modificat la fel ca vectorul de poziție al orcărui punct $A_i (i = 1 \div n)$, deci poziția sa față de punctele A_i nu s-a schimbat.

Observatii:

1. Grafic, poziția centrului forțelor paralele se determină la intersecția axelor centrale obținute pentru două direcții diferite ale forțelor paralele.

2. Dacă $\bar{R} \neq 0$ şi $\bar{M}_O \neq 0$, sistemul de forțe paralele se reduce la o rezultantă unică în raport cu punctele axei centrale, aflată la distanța $d = M_O / R$ de originea sistemului de referință.

3. Daca $\bar{R} \neq 0$ şi $\bar{M}_O = 0$, sistemul de forțe paralele se reduce la o rezultantă unică al cărei suport trece chiar prin punctul O.

4. Dacă $\bar{R} = 0$ si $\bar{M}_O \neq 0$, sistemul de forțe paralele se reduce la un moment rezultant având caracter de vector liber.

5. Dacă $\bar{R} = 0$ si $\bar{M}_O = 0$, torsorul sistemului de forțe paralele este nul, deci rigidul asupra căruia acționează aceste forțe este în echilibru.

4. GEOMETRIA MASELOR

4.1. Centre de greutate (centre de masă)

4.1.1. Centrul de greutate şi de masă al unui sistem de puncte materiale

Se consideră in fig 4.1 un sistem de puncte materiale A_1, A_2,…, A_n, având masele m_1, m_2,…, m_n situat în câmpul gravitațional al Pământului. Se cunosc vectorii de poziție $\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_n$, respectiv coordonatele punctelor (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),…, (x_n, y_n, z_n) într-un sistem de referință Oxyz legat de Pământ.

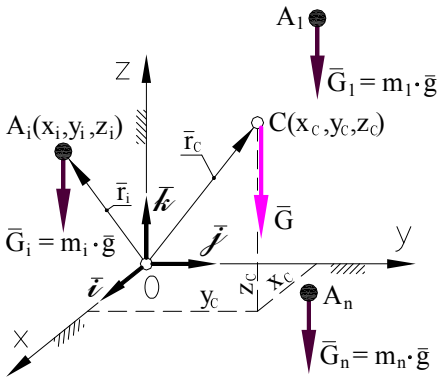


Fig. 4.1

Punctul material A_i, (i=1,2,…n), este atras de Pământ cu o forță $\bar{G}_i = m_i \bar{g}$ numită greutate. Pe un domeniu restrâns, situat în apropierea Pământului, se poate neglija atât variația direcției cât şi a intensității accelerației gravitaționale $\bar{g}$. Ca urmare greutățile punctelor formează un sistem de forțe paralele de același sens.

Rezultanta greutăților punctelor reprezintă greutatea sistemului de puncte materiale:

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^{n} \bar{G}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \bar{g} = M\bar{g} \qquad (4.1)$$

S-a notat cu “M” masa sistemului de puncte, egală cu suma maselor punctelor:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (4.2)$$

Centrul forțelor de greutate, unde se aplică greutatea totală a sistemului de puncte, se numeşte centru de greutate şi se notează cu "C". Poziția lui este data de relațiile pentru determinarea poziției centrului forțelor paralele în care scalarul F_i al forței paralele $\bar{F}_i$ se înlocuieşte cu greutatea G_i a punctului A_i:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{M} \tag{4.3}$$

Se observă că în expresia finală a vectorului de poziție al centrului de greutate apar numai masele punctelor şi din acest motiv centrul de greutate se mai numeşte *centrul maselor* sau *centru de masă*. Coordonatele centrului de greutate (de masă) în reperul Oxyz vor fi :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \; ; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} ; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{4.4}$$

Expresiile $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$ de la numărătorii relațiilor (4.4) se numesc momente statice ale sistemului de puncte față de planele yOz, zOx, xOy, iar expresia $\sum_{i=1} m_i \bar{r}_i$ este momentul static al sistemului față de punctul O.

Aceste mărimi caracterizează distribuția maselor unui sistem de puncte materiale în reperul Oxyz.

Din relatiile (4.3) si (4.4) rezultă egalitățile:

$$\sum_{i=1} m_i \bar{r}_i = M\bar{r}_C \; ; \; \sum_{i=1} m_i x_i = Mx_C \; ; \; \sum_{i=1} m_i y_i = My_C \; ; \; \sum_{i=1} m_i z_i = Mz_C \tag{4.5}$$

care exprimă *teorema momentelor statice* conform căreia: *momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un pol este egal cu masa sistemului înmultită cu vectorul de poziție al centrului de greutate în raport cu acel pol, respectiv momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal cu masa sistemului înmulțită cu distanța de la centrul său de greutate la acel plan*.

4.1.2. Centrul de greutate al unui corp oarecare

Pentru a putea aplica relațiile stabilite în cazul unui sistem de puncte materiale vom considera corpul (C) din figura 4.2 divizat într-un număr de "n" volume ΔV_i care au masa Δm_i şi vectorii de poziție ai centrelor geometrice $\bar{r}_i$.

Conform formulei (4.3) centrul de greutate va avea, aproximativ, vectorul de poziție:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} \tag{4.6}$$

Trecând la limită când $n \to \infty$, atunci sumele din expresia (4.6) se transforma în integrale, masele Δm_i, devin mase elementare "dm" iar vectorii de poziție $\bar{r}_i$ devin $\bar{r}$. Relațiile pentru calculul poziției centrului de greutate al unui corp oarecare vor fi:

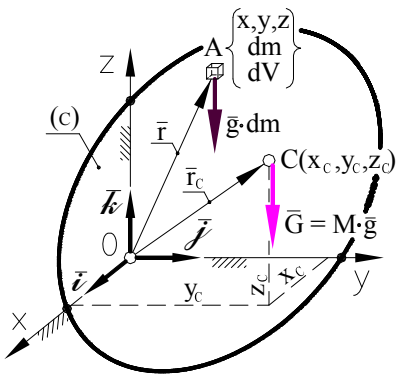


Fig. 4.2

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(C)} \bar{r}\,dm}{\int_{(C)} dm};\ x_C = \frac{\int_{(C)} x\,dm}{\int_{(C)} dm};\ x_C = \frac{\int_{(C)} y\,dm}{\int_{(C)} dm};\ z_C = \frac{\int_{(C)} z\,dm}{\int_{(C)} dm} \tag{4.7}$$

În relațiile (4.7) $\bar{r}$, x, y, z, sunt vectorul de poziție, respectiv coordonatele centrului de greutate ale masei elementare "dm".

Expresiile $\int_{(C)} \bar{r}dm$; $\int_{(C)} xdm$; $\int_{(C)} ydm$; $\int_{(C)} zdm$ reprezintă momentele statice ale corpului în raport cu polul O, respectiv cu planele yOz, zOx, xOy. Din relațiile (4.7) se deduce *teorema momentelor statice* în cazul unui corp:

$$\int_{(C)} \bar{r}dm = M\bar{r}_C ; \int_{(C)} xdm = Mx_C ; \int_{(C)} ydm = My_C ; \int_{(C)} zdm = Mz_C \qquad (4.8)$$

care are un enunț analog cu cel al unui sistem de puncte materiale.

4.1.3. Centrul de greutate al unui corp omogen

Pentru definirea unui corp omogen este necesară introducerea noțiunii de densitate sau masă specifică.

a) Blocuri (volume) omogene (fig. 4.2)

Se numeşte densitate volumetrică (de volum) medie, a unei parți mici din corp, raportul dintre masa acelei porțiuni şi volumul său:

$$\rho_{Vmed} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \qquad (4.9)$$

Se numeşte densitate volumetrică punctuală sau densitate volumetrică, limita către care tinde densitatea volumetrică medie când ΔV tinde catre zero:

$$\rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \qquad (4.10)$$

În cazul corpurilor neomogene densitatea este variabilă:

$$\rho_V = \rho_V(x, y, z) \qquad (4.11)$$

În cazul corpurilor omogene densitatea este constantă:

$$\rho_V = \frac{M}{V} = \text{const} \qquad (4.12)$$

Din (4.10) rezultă:

$$dm = \rho_V dV \qquad (4.13)$$

Poziția centrului de greutate al corpurilor omogene se va determina pe baza relațiilor (4.7) în care se introduce expresia (4.13) a masei elementare. După simplificare cu ρ_V obținem:

$$\bar{r}_C = \frac{\int\limits_{(V)} \bar{r}dV}{\int\limits_{(V)} dV};\ x_C = \frac{\int\limits_{(V)} xdV}{\int\limits_{(V)} dV};\ y_C = \frac{\int\limits_{(V)} ydV}{\int\limits_{(V)} dV};\ z_C = \frac{\int\limits_{(V)} zdV}{\int\limits_{(V)} dV} \tag{4.14}$$

Suma volumelor elementare de la numitorul relațiilor (4.14) reprezintă volumul corpului:

$$\int\limits_{(V)} dV = V \tag{4.15}$$

b) Plăci omogene (fig 4.3)

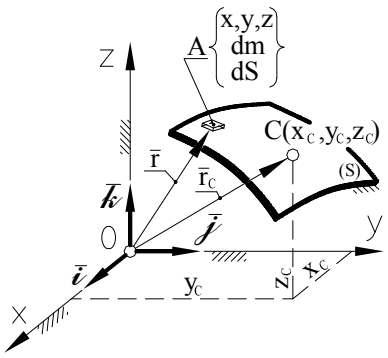


Fig. 4.3

Se numeşte densitate superficială (de suprafață) medie, a unei porțiuni mici de placă, raportul dintre masa Δm a acelei porțiuni şi aria sa ΔS:

$$\rho_{Smed} = \frac{\Delta m}{\Delta S} \tag{4.16}$$

Se numeşte densitate superficială punctuală sau densitate superficială, limita către care tinde densitatea superficială medie când ΔS tinde către zero:

$$\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS} \tag{4.17}$$

În cazul plăcilor neomogene densitatea este variabilă:

$$\rho_S = \rho_S(x, y, z) \tag{4.18}$$

În cazul placilor omogene densitatea este constantă:

$$\rho_S = \frac{M}{S} = \text{const.} \tag{4.19}$$

Din (4.17) rezultă:

$$dm = \rho_S dS \tag{4.20}$$

Poziția centrului de greutate al corpurilor omogene se va determina pe baza relațiilor (4.17) în care se introduce expresia (4.20) a masei elementare. După simplificare cu ρ_S obținem:

$$\bar{r}_C = \frac{\int_{(S)} \bar{r} dS}{\int_{(S)} dS};\ x_C = \frac{\int_{(S)} x dS}{\int_{(S)} dS};\ y_C = \frac{\int_{(S)} y dS}{\int_{(S)} dS};\ z_C = \frac{\int_{(S)} z dS}{\int_{(S)} dS} \tag{4.21}$$

Suma ariilor elementare de la numitorul relațiilor (4.21) reprezintă aria suprafeței plăcii:

$$\int_{(S)} dS = S \tag{4.22}$$

c) Bare omogene (fig 4.4)

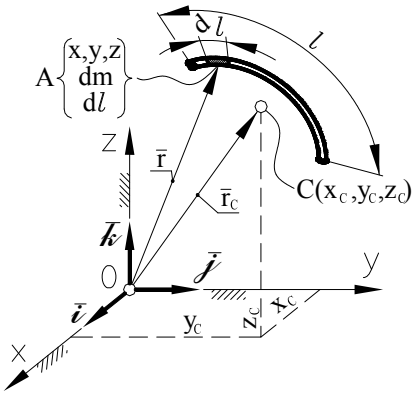


Fig. 4.4

Se numeşte densitate liniară (de lungime) medie, a unei porțiuni mici de bară, raportul dintre masa acelei porțiuni şi lungimea sa:

$$\rho_{lmed} = \frac{\Delta m}{\Delta l} \tag{4.23}$$

Se numeşte densitate liniară punctuală sau densitate liniară, limita către care tinde densitatea liniară medie când Δl tinde către zero:

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl} \tag{4.24}$$

În cazul barelor neomogene densitatea este variabilă:

$$\rho_l = \rho_l(x, y, z) \tag{4.25}$$

În cazul barelor omogene densitatea este constantă:

$$\rho_l = \frac{M}{L} = \text{const.} \tag{4.26}$$

Din (4.24) rezultă:

$$dm = \rho_l dl \tag{4.27}$$

Poziția centrului de greutate al corpurilor omogene se va determina pe baza relatiilor (4.7) în care se introduce expresia (4.27) a masei elementare. Dupa simplificare cu ρ_l obținem:

$$\bar{r}_C = \frac{\int\limits_{(L)} \bar{r} dl}{\int\limits_{(L)} dl};\ x_C = \frac{\int\limits_{(L)} x dl}{\int\limits_{(L)} dl};\ y_C = \frac{\int\limits_{(L)} y dl}{\int\limits_{(L)} dl};\ z_C = \frac{\int\limits_{(L)} z dl}{\int\limits_{(L)} dl} \tag{4.28}$$

Suma lungimilor elementare de la numitorul relațiilor (4.28) reprezintă lungimea barei:

$$\int\limits_{(L)} dl = L \tag{4.29}$$

Observații:

a) Centrul de greutate păstreaza proprietățile centrului forțelor paralele;

b) Dacă un corp omogen admite un plan de simetrie, o axă de simetrie sau un centru de simetrie atunci centrul de greutate al corpului se va afla în acel plan, pe acea axă sau în acel centru.

4.1.4. Centrul de greutate al corpurilor compuse

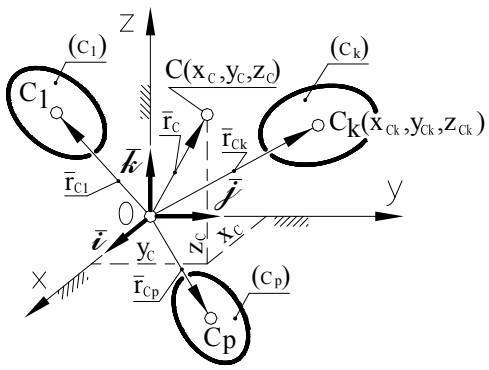


Fig. 4.5

Se consideră un corp (C) alcătuit din "p" corpuri de mase M_1, M_2,…, M_p (fig 4.5). Cunoscând pozițiile centrelor de masa ale corpurilor componente, se cere determinarea centrului de greutate al corpului compus.

Vectorul de poziție al centrului de greutate al corpului (C) este:

$$\bar{r}_C = \frac{\int\limits_{(C)} \bar{r}dm}{\int\limits_{(C)} dm} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} \int\limits_{(C_k)} \bar{r}dm}{\sum\limits_{k=1}^{p} \int\limits_{(C_k)} dm} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} \bar{r}_{C_k} M_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} M_k} \tag{4.30}$$

S-a ținut seama că:

$$\int\limits_{(C_k)} \bar{r}dm = \bar{r}_{C_k} M_k \,;\; \int\limits_{(C_k)} dm = M_k \tag{4.31}$$

În cazul corpurilor compuse omogene masele M_k vor fi, înlocuite, respectiv cu volumele V_k, ariile S_k sau lungimile L_k.

Astfel pentru:

- blocuri (volume) omogene,

$$\bar{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} \bar{r}_{C_k} V_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} V_k};\; x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} x_{C_k} V_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} V_k};\; y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} y_{C_k} V_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} V_k};\; z_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} z_{C_k} V_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} V_k} \tag{4.32}$$

- plăci omogene,

$$\bar{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} \bar{r}_{C_k} S_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} S_k};\; x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} x_{C_k} S_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} S_k};\; y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} y_{C_k} S_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} S_k};\; z_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} z_{C_k} S_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} S_k} \tag{4.33}$$

- bare omogene,

$$\bar{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} \bar{r}_{C_k} L_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} L_k};\; x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} x_{C_k} L_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} L_k};\; y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} y_{C_k} L_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} L_k};\; z_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{p} z_{C_k} L_k}{\sum\limits_{k=1}^{p} L_k} \tag{4.34}$$

Observație: Dacă un corp (C) poate fi considerat ca provenind dintr-un corp (C_1) din care a fost eliminat un corp (C_2) si dacă se cunosc masele M_1 si M_2 şi centrele de masa C_1 si C_2 ale celor două corpuri, atunci poziția centrului de greutate (C) se determină cu relația:

$$\bar{r}_C = \frac{\bar{r}_{C_1} M_1 - \bar{r}_{C_2} M_2}{M_1 - M_2} \tag{4.35}$$

În cazul unui corp omogen masele se înlocuiesc corespunzător cu volume, arii sau lungimi.

4.1.5. Teoremele lui Guldin-Pappus

[(Guldin, Paul, 1577-1643), (Pappus din Alexandria, secolul 4 d.H.)]

Teorema I-a: "*Aria suprafeței generate prin rotirea unui arc de curbă plană în jurul unei axe din planul curbei, arcul fiind situat în întregime de aceeaşi parte a axei, este egală cu produsul dintre lungimea arcului de curbă şi lungimea arcului de cerc descris de centrul de masă al arcului de curbă"*.

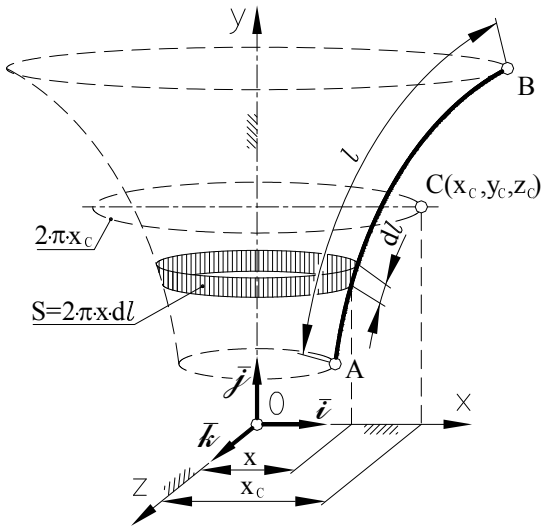


Fig. 4.6

Pentru demonstrație vom considera în figura 4.6 arcul de curba "AB" de lungime "L", situat în planul xOy de aceeaşi parte a axei Oy, având centrul de greutate la distanța "x_c" de axa Oy şi care se roteşte complet în jurul axei Oy. Va lua naştere o suprafață de revoluție a cărei arie urmează să o calculăm.

Aria elementara "dS" a suprafeței laterale a trunchiului de con elementar rezultat prin rotirea completă a unui arc de curba elementar "dl" este:

$$dS = 2\pi\, x\, dl\,, \tag{4.36}$$

unde "x" reprezintă abscisa centrului de greutate al arcului elementar de lungime "dl".

Suprafața de revoluție generată prin rotirea completă a întregului arc de curba "AB" va avea aria:

$$S = \int_{(S)} dS = 2\pi \int_A^B x\, dl \tag{4.37}$$

Conform (4.28):

$$\int_A^B x\,dl = x_C L \tag{4.38}$$

Substituind (4.38) în (4.37) obținem ce am dorit să demonstrăm:

$$S = 2\pi x_C L \tag{4.39}$$

Dacă rotația se face numai cu un unghi $\alpha \le 2\pi$, atunci:

$$S = \alpha x_C L \tag{4.40}$$

Teorema a II-a: "*Volumul corpului de revoluție generat prin rotirea unei suprafețe plane omogene închise în jurul unei axe planul suprafeței, suprafața fiind situată în întregime de aceeaşi parte a axei, este egal cu produsul dintre aria suprafeței şi lungimea arcului de cerc descris de centrul de greutate al suprafeței"*.

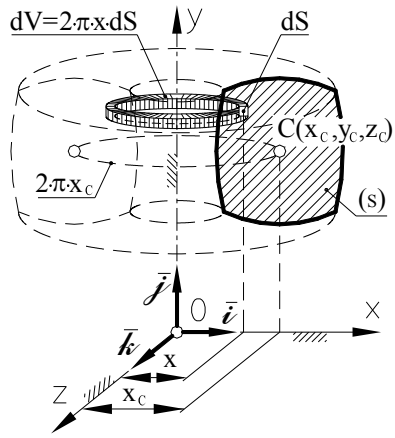


Fig. 4.7

Pentru demonstrație vom considera, în figura 4.7, o suprafață plană omogenă închisă de arie "S", situată în planul xOy de aceeaşi parte a axei Oy, având centrul de greutate la distanta "x_C" de axa Oy şi care se roteşte complet în jurul axei Oy. Va lua naştere un corp omogen de revoluție al carui volum urmeaza să îl calculăm.

Volumul "dV" al torului elementare rezultat prin rotirea completă a unei suprafețe elementare "dS" este:

$$dV = 2\pi x\,dS \tag{4.41}$$

unde "x" reprezintă abscisa centrului de greutate al suprafeței elementare de arie "dS".

Volumul corpului de revoluție generat prin rotirea completă a întregii suprafețe plane va fi:

$$V = \int_{(V)} dV = 2\pi \int_{(S)} x\,dS \tag{4.42}$$

Conform (4.21):

$$\int_{(S)} x dS = x_C S \tag{4.43}$$

Substituind (4.43) în (4.42) obținem ce am dorit să demonstrăm:

$$V = 2\pi x_C S \tag{4.44}$$

Daca rotația se face numai cu un unghi $\beta \le 2\pi$, atunci:

$$V = \beta x_C S \tag{4.45}$$

4.2. Momente de inerție

4.2.1. Momente de inerție mecanice. Momente de inerție geometrice. Rază de giratie

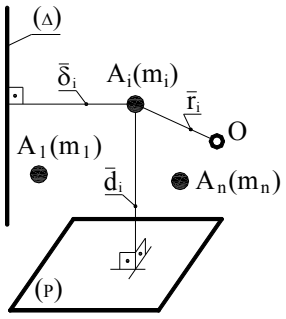


Fig. 4.8

Momentele de inerție mecanice sunt mărimi care caracterizează răspândirea maselor unui sistem material în raport cu elementele unui sistem de referință dat. Cu ajutorul lor se exprimă inerția unui corp aflat în mişcare de rotație.

În figura 4.8 este reprezentat un sistem de puncte materiale A_1, A_2,…, A_n, de mase m_1, m_2, …, m_n, un plan (P), o dreaptă (Δ) şi un pol O. Notăm cu "d_i", "δ_i" şi "r_i" distanțele de la punctul A_i, respectiv la plan, dreaptă şi pol.

Se numeşte *moment de inerție mecanic* al sistemului de puncte materiale în raport cu un plan, o dreaptă sau un pol, suma produselor dintre masele punctelor şi pătratele distanțelor la planul, dreapta sau polul considerat.

Vom nota cu: "J_P" – *momentul de inerție mecanic planar,* "J_Δ" – *momentul de inerție mecanic axial*, "J_O" – *momentul de inerție mecanic polar*. Expresiile acestor momente de inerție ale sistemului de puncte față de planul (P), dreapta (Δ) şi polul O sunt:

$$J_p = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2;\ \ J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i^2;\ \ J_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{4.46}$$

În cazul unui corp (fig 4.9) sumele se transformă în integrale referitoare la domeniul ocupat de corp:

$$J_P = \int_{(C)} d^2 dm\,;\ J_\Delta = \int_{(C)} \delta^2 dm\,;\ J_O = \int_{(C)} r^2 dm \qquad (4.47)$$

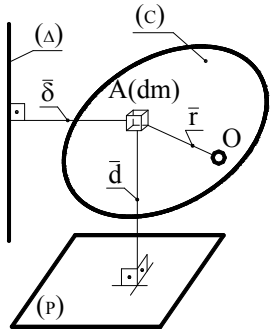


Fig. 4.9

Dimensiunile şi unitaţile de măsură pentru momentele de inerţie sunt:

$$[J] = M \cdot L^2, \text{ respectiv } kg \cdot m^2.$$

Analog se definesc *momentele de inerţie geometrice* ale unui corp în raport cu un plan, o axă sau un punct.

- pentru corpuri de volum:

$$I_P = \int_{(V)} d^2 dV\,;\ I_\Delta = \int_{(V)} \delta^2 dV\,;\ I_O = \int_{(V)} r^2 dV \qquad (4.48)$$

- pentru plăci:

$$I_P = \int_{(S)} d^2 dS\,;\ I_\Delta = \int_{(S)} \delta^2 dS\,;\ I_O = \int_{(S)} r^2 dS \qquad (4.49)$$

- pentru bare:

$$I_P = \int_{(L)} d^2 dl\,;\ I_\Delta = \int_{(L)} \delta^2 dl\,;\ I_O = \int_{(L)} r^2 dl \qquad (4.50)$$

Tinând seama de (4.13), (4.20) şi (4.27), în cazul corpurilor omogene, între momentele de inerţie mecanice şi cele geometrice se stabileşte relaţia generală:

$$J = \rho I \qquad (4.51)$$

Fie un corp (C) de masă "M" şi o axă (Δ) faţă de care momentul de inerţie mecanic este J_Δ.

Raza de giraţie sau de inerţie, i_Δ, a corpului faţă de o axă este distanţa fictivă la care ar trebui plasată masa corpului, concentrată într-un singur punct, astfel încât momentul de inerţie al punctului faţă de axă să fie egal cu cel al corpului faţă de aceeaşi axă. Din egalitatea $J_\Delta = Mi_\Delta^2$ rezultă:

$$i_\Delta = \sqrt{\frac{J_\Delta}{M}} \qquad (4.52)$$

Analog se definesc razele de giraţie faţă de un plan sau un punct:

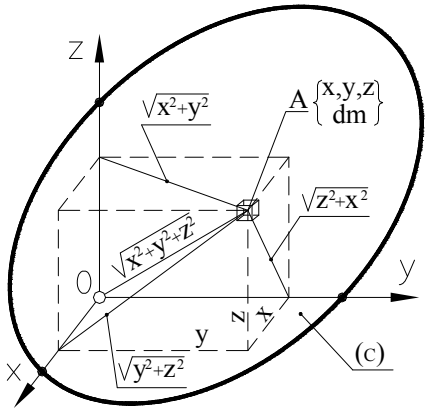


Fig. 4.10

$$i_P = \sqrt{\frac{J_P}{M}}\ ;\ i_O = \sqrt{\frac{J_O}{M}} \qquad (4.53)$$

Dacă se ataşează corpului (C) un sistem de referinţă Oxyz (fig 4.10), se definesc următoarele momente de inerţie mecanice în raport cu planele determinate de axele de coordonate, cu axele şi cu originea O:

- *momente de inertie mecanice planare,*

$$J_{yOz} = \int_{(C)} x^2 dm\ ;\ J_{zOx} = \int_{(C)} y^2 dm\ ;\ J_{xOy} = \int_{(C)} z^2 dm \qquad (4.54)$$

- *momente de inerţie mecanice axiale,*

$$J_x = \int_{(C)} \left(y^2 + z^2\right) dm\ ;\ J_y = \int_{(C)} \left(z^2 + x^2\right) dm\ ;\ J_z = \int_{(C)} \left(x^2 + y^2\right) dm \qquad (4.55)$$

- *moment de inerţie mecanic polar*,

$$J_O = \int_{(C)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm \qquad (4.56)$$

- *momente de inerţie mecanice centrifugale,*

$$J_{yz} = \int yz dm\ ;\ J_{zx} = \int zx dm\ ;\ J_{xy} = \int xy dm \qquad (4.57)$$

Momentele de inerţie planare, axiale şi polare sunt mărimi scalare pozitive sau cel puţin nule, pe când momentele de inerţie centrifugale pot fi pozitive, negative sau nule.

Între momentele de inerţie mecanice date de relaţiile (4.54) – (4.57) sunt evidente relaţiile:

- în spaţiu

$$J_O = J_{yOz} + J_{xOz} + J_{xOy} \qquad (4.58)$$

$$J_O = J_{yOz} + J_x + J_{zOx} + J_y = J_{xOy} + J_z \tag{4.59}$$

$$J_O = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) \tag{4.60}$$

$$J_x = J_{zOx} + J_{xOy};\ J_y = J_{xOy} + J_{yOz};\ J_z = J_{zOy} + J_{yOz} \tag{4.61}$$

$$J_x + J_y \geq J_z;\ J_y + J_z \geq J_x;\ J_z + J_x \geq J_y \tag{4.62}$$

- în plan

$$J_O = J_z = J_x + J_y \tag{4.63}$$

4.2.2. Variatia momentelor de inertie mecanice in raport cu axe paralele. Teorema lui Steiner

Fie un corp (C) de masa "M", o axă (Δ_C) ce trece prin centrul de greutate al corpului şi o altă axa (Δ) paralelă cu prima. Se cunosc: i) momentul de inerţie mecanic al corpului J_{Δ_C} în raport cu axa (Δ_C), ii) distanţa "d" dintre cele două axe şi se cere aflarea momentului de inerţie mecanic J_Δ faţă de axa (Δ_C).

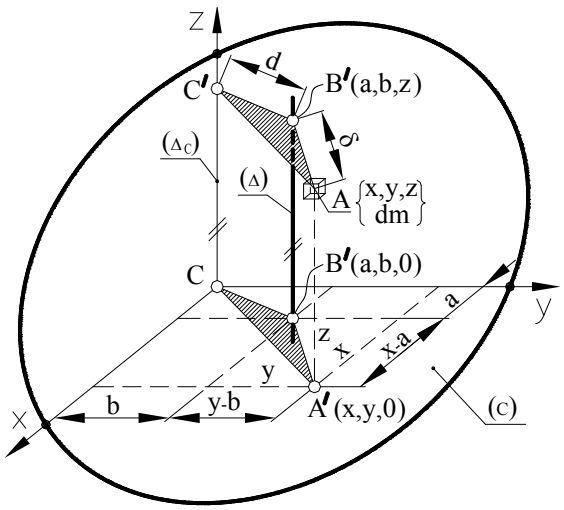


Fig. 4.11

Pentru rezolvarea problemei se alege un sistem de referinţă Cxyz cu axa Oz suprapusă peste axa (Δ_C) şi cu originea în centrul de greutate al corpului (fig. 4.11). Axa (Δ) înţeapă planul xCy în punctul "B" de coordoate x_B=a, y_B=b. Se poate scrie relaţia:

$$a^2 + b^2 = d^2 \tag{4.64}$$

Prin definiţie:

$$J_{\Delta_C} = J_z = \int_{(C)} \left(x^2 + y^2\right) dm \tag{4.65}$$

$$J_\Delta = \int_{(C)} \delta^2 dm = \int_{(C)} (AB')^2 dm = \int_{(C)} (A'B)^2 dm = \int_{(C)} \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dm =$$

$$= \int_{(C)} (x^2 + y^2) dm + (a^2 + b^2) \int_{(C)} dm - 2a \int_{(C)} x\, dm - 2b \int_{(C)} y\, dm \tag{4.66}$$

Deoarece centrul de greutate se află în originea sistemului de referință (x_C=0, y_C=0, z_C=0), aplicând teorema momentelor statice, obținem:

$$\int_{(C)} x dm = Mx_C = 0; \quad \int_{(C)} y dm = My_C = 0 \tag{4.67}$$

Substituind (4.64), (4.65) şi (4.67) în (4.66) şi ținând seama că $\int_{(C)} dm = M$, rezultă relația:

$$J_\Delta = J_{\Delta_C} + Md^2 \tag{4.68}$$

care exprimă teorema lui Steiner (Steiner, Jakob, 1796-1863) cu următorul enunț: "*Momentul de inerție al unui corp (sistem material) față de o axa* (Δ) *este egal cu momentul față de axa paralelă* (Δ_C) *care trece prin centrul de greutate al corpului plus masa înmulțită cu pătratul distanței dintre cele două axe*".

Din teorema lui Steiner (4.68) decurg câteva proprietăți ale variației momentelor de inerție în raport cu axele paralele:

1. Pentru o direcție dată, momentul de inerție minim se obține față de axa care trece prin centrul de greutate al corpului (sau sistemului material);

2. Locul geometric al axelor paralele cu o direcție dată, față de care valorile momentelor de inerție sunt egale, este un cilindru circular a cărui axă de simetrie trece prin centrul de greutate al corpului şi este paralelă cu direcția dată;

3. Relația dintre momentele de inerție față de două axe paralele (Δ_1) şi (Δ_2) situate la distanțele "d_1" respectiv "d_2" față de centrul de greutate al corpului este:

$$J_{\Delta_2} = J_{\Delta_1} + M\left(d_2^2 - d_1^2\right) \tag{4.69}$$

4.2.3. Variația momentelor de inerție mecanice centrifugale în raport cu axe paralele

Se consideră un corp (C) de masă "M" raportat la un sistem de referință Cxyz, cu originea în centrul de greutate al corpului (fig 4.12). Sunt cunoscute momentele de inerție centrifugale față de acest sistem.

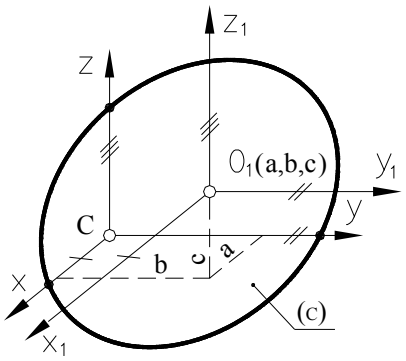


Fig. 4.12

$$J_{yz} = \int yzdm\,;\quad J_{zx} = \int zxdm\,;\quad J_{xy} = \int xydm \tag{4.69}$$

Se urmăreşte determinarea momentelor de inerție centrifugale față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ care are axele respectiv paralele cu ale reperului Cxyz şi originea O_1 în punctul de coordonate (a, b, c).

Prin definiție:

$$J_{y_1z_1} = \int_C y_1z_1dm\,;\ J_{z_1x_1} = \int_C z_1x_1dm\,;\ J_{x_1y_1} = \int_C x_1y_1dm \tag{4.70}$$

Înlocuind în (4.70):

$$x_1=x-a;\ y_1=y-b;\ z_1=z-c \tag{4.71}$$

obținem:

$$\begin{aligned}
J_{y_1z_1} &= \int_C (y-b)(z-c)dm = \int_C yzdm + bc\int_C dm - c\int_C ydm - b\int_C zdm \\
J_{z_1x_1} &= \int_C (z-c)(x-a)dm = \int_C zxdm + ca\int_C dm - a\int_C zdm - c\int_C xdm \\
J_{x_1y_1} &= \int_C (x-a)(y-b)dm = \int_C xydm + ab\int_C dm - b\int_C xdm - a\int_C ydm
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Deoarece centrul de greutate se află în originea sistemului de referință ($x_C=0$, $y_C=0$, $z_C=0$), teorema momentelor statice conduce la:

$$\int_{(C)} xdm = Mx_C = 0\,;\ \int_{(C)} ydm = My_C = 0\,;\ \int_{(C)} zdm = Mz_C = 0 \tag{4.73}$$

Substituind (4.69) şi (4.73) în (4.72) şi tinând seama că $\int_{(C)} dm = M$, rezultă relaţiile:

$$J_{y_1z_1} = J_{yz} + Mbc \; ; \; J_{z_1x_1} = J_{zx} + Mca \; ; \; J_{x_1y_1} = J_{xy} + Mab \qquad (4.74)$$

care exprimă teorema lui Steiner în cazul momentelor de inerţie centrifugale.

4.2.4. Variaţia momentelor de inerţie mecanice în raport cu axe concurente

Se dă un corp (C) la care sunt cunoscute momentele de inerţie axiale şi centrifugale J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}, faţă de un sistem de referinţă Oxyz (fig. 4.13). Fie o dreaptă (Δ) care trece prin O al cărei versor are cosinusurile directoare: α, β şi γ. Se cere determinarea momentului de inerţie J_Δ al corpului faţă de axa (Δ).

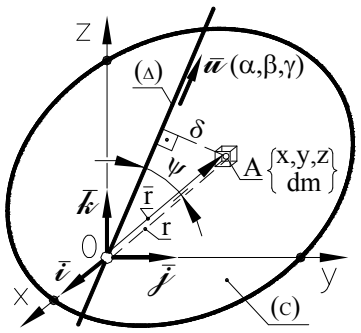


Fig. 4.13

Prin definiţie:

$$J_\Delta = \int_{(C)} \delta^2 dm \qquad (4.75)$$

Pătratul distanţei "δ" de la un punct oarecare A(x,y,z) la axa (Δ) se înlocuieşte cu:

$$\begin{aligned}\delta^2 &= (OA)^2 - (OB^2) = r^2 - (r\cos\psi)^2 = \bar{r}^2 - (\bar{r}\cdot\bar{u})^2 = (x^2+y^2+z^2) - (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 = \\ &= (x^2+y^2+z^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 = \\ &= \alpha^2(y^2+z^2) + \beta^2(z^2+x^2) + \gamma^2(x^2+y^2) - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx \qquad (4.76)\end{aligned}$$

În (4.76) a fost folosită identitatea: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Introducând (4.76) în (4.75) şi tinând seama de relaţiile de definiţie (4.55) si (4.57) se obţine relaţia căutată:

$$J_\Delta = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\beta\gamma J_{yz} - 2\gamma\alpha J_{zx} \qquad (4.77)$$

Relaţia (4.77) exprimă *legea de variaţie a momentelor de inerţie în raport cu axe concurente*. Forma matriceală a acesteia este:

$$J_\Delta = [u]^T \cdot [J] \cdot [u], \qquad (4.78a)$$

unde:

$$[u]^T = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]\ ; \qquad [J] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{yz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{4.78b}$$

Matricea [J] se numeste *tensor inerțial sau matricea momentelor de inerție.*

Dacă sistemul material este situat în planul xOy, axa (Δ) fiind de asemenea în acest plan, înclinată cu unghiul "φ" față de Ox, rezultă: z=0, γ=0, α=cosφ, β=sinφ, iar formula (4.77) devine:

$$J_\Delta = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - 2J_{xy} \sin\varphi\cos\varphi \tag{4.79}$$

Fie un corp (C) de masă M de care este invariabil legat sistemul de referință Cxyz, cu originea în centrul de greutate al corpului, față de care se presupun cunoscute momentele de inerție axiale şi centrifugale: J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} (fig 4.14).

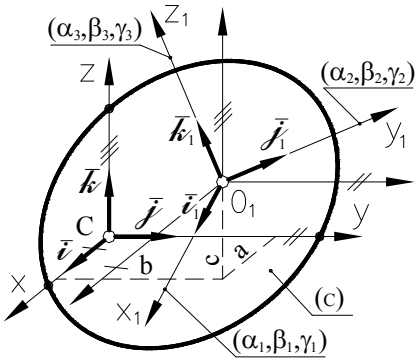


Fig. 4.14

Momentele de inerție ale rigidului față de un reper $O_1x_1y_1z_1$, a cărui origine are vectorul de poziție $\bar{p}$ şi coordonatele carteziene $x_{O_1} = a$, $y_{O_1} = b$, $z_{O_1} = c$ în reperul Cxyz şi ale cărui axe O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 au respectiv cosinusurile directoare (α_1 ,β_1, γ_1), (α_2 ,β_2 ,γ_2), (α_3, β_3 ,γ_3) față de axele reperului Cxyz, rezultă din relația matriceala:

$$[J_1] = [R]^T \cdot \left([J] + M \cdot [\hat{\bar{p}}] \cdot [\hat{\bar{p}}]^T \right) \cdot [R] \tag{4.80}$$

în care:

$$[J_1] = \begin{bmatrix} J_{x_1} & -J_{x\ y_1} & -J_{x_1z_1} \\ -J_{y_1x_1} & J_{y_1} & -J_{y_1z_1} \\ -J_{z_1x_1} & -J_{z_1y_1} & J_{z_1} \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

- este matricea momentelor de inerție (tensorul inerțial) față de reperul $O_1x_1y_1z_1$;

$$[J]=\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{yz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{4.82}$$

- este matricea momentelor de inerție (tensorul inerțial) față de reperul Cxyz;

$$[R]=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{4.83}$$

- este matricea cosinusurilor directoare numită şi matrice de rotație;

$$\left[\hat{\bar{p}}\right]=\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

- este matricea antisimetrică asociată vectorului de poziție al punctului O_1 față de punctul C;

$$M\cdot\left[\hat{\bar{p}}\right]\cdot\left[\hat{\bar{p}}\right]^T = M\cdot\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ba & c^2+a^2 & -bc \\ -ca & -cb & a^2+b^2 \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

- este matricea de inerție a punctului O_1 în care se consideră concentrată întreaga masa "M" a corpului, față de reperul Cxyz.

4.2.5. Momente principale de inerție. Axe principale de inerție

Din relația (4.77) se constată că momentul de inerție mecanic "J_Δ" față de axa "(Δ)" ce trece prin originea sistemului de referință Oxyz depinde de orientarea axei prin cosinusurile directoare α, β, γ, care respectă egalitatea:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \tag{4.86}$$

Se numesc *axe principale de inerție*, relative la un punct, acele axe concurente în punctul dat față de care valorile momentelor de inerție devin extreme. Momentele de inerție în raport cu aceste axe se numesc *momente principale de inerție.*

Determinarea momentelor principale de inerţie conduce la aflarea extremelor unei funcţii supuse la legături. În Analiza matematică, pentru determinarea extremelor legate sau condiţionate ale unei funcţii de mai multe variabile, se utilizează îndeosebi metoda lui Lagrange (Lagrange, Joshep-Louis, 1736-1813). Metoda constă în înlocuirea funcţiei de studiat

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.87}$$

între variabilele căreia există "p<n" relaţii de legatură:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0. \end{aligned} \tag{4.88}$$

cu o funcţie auxiliară

$$\Phi = y + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \varphi_j, \tag{4.89}$$

în care "λ_j" sunt parametri nedeterminaţi, numiti multiplicatorii lui Lagrange. Noua funcţie depinde de "n+p" variabile considerate independente. Pentru ca functie Φ sa aibă un extrem este necesar ca cele "n + p" derivate parţiale în raport cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ să se anuleze:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \text{ , } (i=1, 2, \ldots, n); \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} \equiv \varphi_j \ (x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \ (j=1, 2, \ldots, p) \tag{4.90}$$

Din sistemul (4.90), de "n + p" ecuaţii, în general neliniare, se determină multiplicatorii "λ_j (j =1, 2, …, p)" şi valorile variabilelor "x_i, (i=1, 2, …, n)" pentru care funcţia "y" devine staţionară, fără a putea preciza caracterul extremului.

În cazul funcţiei (4.77) există o singură relaţie de legatură, de forma (4.88), între variabilele reprezentate de cosinusurile directoare:

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0 \tag{4.91}$$

Funcţia ajutătoare va fi:

$$\Phi = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2 - 2J_{xy}\alpha\beta - 2J_{yz}\beta\gamma - 2J_{zx}\gamma\alpha + \lambda\left(1 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\gamma^2\right) \tag{4.92}$$

Egalând cu zero derivatele parțiale ale acestei funcții,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \equiv 2J_x\alpha - 2J_{xy}\beta - 2J_{zx}\gamma - 2\lambda\alpha = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \equiv 2J_y\beta - 2J_{xy}\alpha - 2J_{yz}\gamma - 2\lambda\beta = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \equiv 2J_z\gamma - 2J_{yz}\beta - 2J_{zx}\alpha - 2\lambda\gamma = 0,$$

obținem un sistem liniar şi omogen în necunoscutele α, β, γ:

$$\begin{cases} (J_x - \lambda)\alpha - J_{xy}\beta - J_{zx}\gamma = 0 \\ -J_{yz}\alpha + (J_y - \lambda)\beta - J_{yz}\gamma = 0 \\ -J_{zx}\alpha - J_{yz}\beta + (J_z - \lambda)\gamma = 0 \end{cases} \tag{4.93}$$

care nu admite soluții banale α = 0, β = 0, γ = 0, întrucât $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Rezultă că determinantul format cu coeficienții necunoscutelor trebuie să fie nul:

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{yx} & J_y - \lambda & -J_{yx} \\ -J_{zx} & -J_{yz} & J_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.94}$$

Deoarece elementele determinantului sunt simetrice față de diagonala principală ecuația de gradul trei care rezultă din dezvoltarea lui are întotdeauna rădăcini reale:

$$-\lambda^3 + L_1\lambda^2 - L_2\lambda + L_3 = 0, \tag{4.95}$$

unde:

$$\begin{cases} L_1 = J_x + J_y + J_z = J_1 + J_2 + J_3 \\ L_2 = J_xJ_y + J_yJ_z + J_zJ_x - J_{xy}^2 - J_{yz}^2 - J_{zx}^2 = J_1J_2 + J_2J_3 + J_3J_1 \\ L_3 = J_xJ_yJ_z - J_{xy}^2J_z - J_{yz}^2J_x - J_{zx}^2J_y - 2J_{xy}J_{yz}J_{zx} = J_1J_2J_3 \end{cases} \tag{4.96}$$

Coeficientii L_1, L_2, L_3 sunt trei invarianți (liniar, pătratic şi cubic) care nu depind de alegerea sistemului de referinta Oxyz.

Se demonstrează ca rădăcinile ecuației (4.95) sunt chiar valorile extreme ale momentului de inerție J_Δ.

Înlocuind $\lambda=\lambda_1$ in (4.93) şi asociind (4.91) rezultă cosinusurile directoare α_1 ,β_1 ,γ_1 ale axei principale Δ_1 în raport cu care momentul de inerţie J_Δ devine extrem. In baza relaţiei (4.77) valoarea momentului de inerţie corespunzatoare acestei direcţii este:

$$J_1 = J_x\alpha_1^2 + J_y\beta_1^2 + J_z\gamma_1^2 - 2J_{xy}\alpha_1\beta_1 - 2J_{yz}\beta_1\gamma_1 - 2J_{zx}\gamma_1\alpha_1 \quad (4.97)$$

Rescriem ecuaţiile (4.93), care sunt verificate de $\lambda=\lambda_1$, $\alpha=\alpha_1$,$\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$:

$$\begin{cases} (J_x - \lambda_1)\alpha_1 - J_{xy}\beta_1 - J_{zx}\gamma_1 = 0 \\ -J_{yz}\alpha_1 + (J_y - \lambda_1)\beta_1 - J_{yz}\gamma_1 = 0 \\ -J_{zx}\alpha_1 - J_{yz}\beta_1 + (J_z - \lambda_1)\gamma_1 = 0 \end{cases} \quad (4.98)$$

Înmulţim prima ecuaţie cu α_1, a doua cu β_1, a treia cu γ_1 şi le adunăm:

$$J_x\alpha_1^2 + J_y\beta_1^2 + J_z\gamma_1^2 - 2J_{xy}\alpha_1\beta_1 - 2J_{yz}\beta_1\gamma_1 - 2J_{zx}\gamma_1\alpha_1 - \lambda_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) = 0 \quad (4.99)$$

Ţinând seama de (4.86) şi comparând relaţiile (4.99) şi (4.97), rezultă că $\lambda_1=J_1$. Analog se demonstrează că $\lambda_2=J_2$, $\lambda_3=J_3$. Axele corespunzatoare parametrilor λ_2 si λ_3 le vom nota cu (Δ_2) respectiv (Δ_3).

Momentele de inertie J_1, J_2, J_3 sunt momentele principale de inerţie, iar axele (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) corespunzatoare, axele principale de inerţie.

Observaţii privind axele principale de inerţie

1. Cele trei axe principale de inerţie formează un sistem cartezian triortogonal.

Pentru demonstraţie se multiplică ecuaţiile (4.98), respectiv cu α_2, β_2, γ_2 şi se adună:

$$\begin{aligned} &-\lambda_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + J_x\alpha_1\alpha_2 + J_y\beta_1\beta_2 + J_z\gamma_1\gamma_2 - \\ &-J_{xy}(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1) - J_{yz}(\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1) - J_{zx}(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

Se rescrie sistemul (4.93) pentru $\lambda=\lambda_2$, $\alpha=\alpha_2$, $\beta=\beta_2$, $\gamma=\gamma_2$, se înmulţesc ecuaţiile, respectiv cu α_1, β_1, γ_1 şi se adună:

$$\begin{aligned} &-\lambda_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + J_x\alpha_1\alpha_2 + J_y\beta_1\beta_2 + J_z\gamma_1\gamma_2 - \\ &-J_{xy}(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1) - J_{yz}(\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1) - J_{zx}(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Făcând diferenţa relaţiilor (4.101) şi (4.100) rezultă:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0 \tag{4.102}$$

Întrucât, în general, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, relația (4.102) devine:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \tag{4.103}$$

Membrul din stânga relației (4.103) reprezintă produsul scalar al versorilor axelor (Δ_1) şi (Δ_2):

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 \tag{4.104}$$

Ester evident că:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0 \tag{4.105}$$

adică axele (Δ_1) şi (Δ_2) sunt ortogonale. Analog se demonstrează perpendicularitatea axelor (Δ_2) si (Δ_3), respectiv (Δ_3) şi (Δ_1).

Ca parametrii directori ai axelor principale de inertie pot fi considerati minorii uneia din liniile determinantului (4.94) în care s-a inlocuit λ, respectiv cu J_1, J_2, J_3:

- pentru axa (Δ_1),

$$\begin{vmatrix} J_y - J_1 & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z - J_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{yx} \\ J_z - J_1 & -J_{zx} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_1 \\ -J_{zx} & -J_{yz} \end{vmatrix} \tag{4.106}$$

- pentru axa (Δ_2),

$$\begin{vmatrix} J_y - J_2 & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z - J_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{yx} \\ J_z - J_2 & -J_{zx} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_2 \\ -J_{zx} & -J_{yz} \end{vmatrix} \tag{4.107}$$

- pentru axa (Δ_3),

$$\begin{vmatrix} J_y - J_3 & -J_{yz} \\ -J_{zy} & J_z - J_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -J_{yz} & -J_{yx} \\ J_z - J_3 & -J_{zx} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -J_{yx} & J_y - J_3 \\ -J_{zx} & -J_{yz} \end{vmatrix} \tag{4.108}$$

2. Axele principale de inerţie care trec prin centrul de greutate al sistemului material se numesc *axe principale centrale de inerţie*.

3. În raport cu planele determinate de axele principale de inerţie, momentele de inerţie centrifugale sunt nule.

Pentru demonstraţie vom considera un sistem de referinta $Ox_1y_1z_1$ în raport cu care momentele de inerţie centrifugale sunt nule:

$$J_{x_1y_1} = 0;\ J_{y_1z_1} = 0;\ J_{z_1x_1} = 0 \tag{4.109}$$

Presupunând cunoscute momentele de inerție axiale J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}, momentele de inertie principale rezultă din ecuația:

$$\begin{bmatrix} J_{x_1}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_1}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_1}-\lambda \end{bmatrix} = \left(J_{x_1}-\lambda\right)\left(J_{y_1}-\lambda\right)\left(J_{z_1}-\lambda\right) = 0 \tag{4.110}$$

Rezultă că: $\lambda_1 = J_1 = J_{x_1}$, $\lambda_2 = J_2 = J_{y_1}$, $\lambda_3 = J_3 = J_{z_1}$, adică sistemul $Ox_1y_1z_1$ este construit pe axele principale de inerție.

4. Momentul de inerție față de o axa (Δ), care trece prin O și care este definită prin cosinusirile directoare α, β, γ în raport cu axele principale de inerție este:

$$J_\Delta = J_1\alpha^2 + J_2\beta^2 + J_3\gamma^2 \tag{4.111}$$

5. Daca sistemul material este situat într-un plan (de exemplu planul xOy) atunci:

$$z = 0;\ J_x = \int_{(S)} y\,dm;\ J_y = \int_{(S)} x\,dm;\ J_z = \int_{(S)} \left(x^2+y^2\right)dm = J_O = J_x + J_y;$$

$$J_{xy} = \int_{(X)} xy\,dm;\ J_{yz} = J_{xz} = 0 \tag{4.112}$$

Ecuația (4.94) devine:

$$\begin{vmatrix} J_x-\lambda & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & J_O-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.113}$$

sau,

$$\left(J_O-\lambda\right)\left[\lambda^2 - \left(J_x+J_y\right)\lambda + J_xJ_y - J_{xy}^2\right] = 0 \tag{4.114}$$

având rădăcinile:

$$\lambda_{1,2} = J_{1,2} = \frac{J_x+J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y-J_x}{2}\right)^2 + J_{xy}^2};\ \lambda_3 = J_3 = J_O \tag{4.115}$$

Cunoaşterea momentelor principale de inerţie dă posibilitatea aflării momentelor de inerţie în raport cu orice alt sistem Oxy având acceaşi origine cu sistemul axelor principale şi fiind rotit cu unghiul "α" faţă de acesta:

$$J_x = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha \; ; \; J_y = J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha \; ; \qquad (4.116)$$

$$J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha \qquad (4.117)$$

Direcţiile principale, pentru care momentul de inerţie devine extrem, se obţin anulând derivata în raport cu unghiul "φ" a expresiei J_Δ data de (4.79):

$$\frac{dJ_\Delta}{d\varphi} = -2J_x \cos\varphi \sin\varphi + 2J_y \sin\varphi \cos\varphi - 2J_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = 0 \qquad (4.118)$$

Rezultă:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \qquad (4.119)$$

Din această relaţie se obţin pentru unghiul "φ" două valori "φ_1" şi "φ_2", care diferă între ele cu π/2, fapt ce demonstrează că direcţiile principale sunt perpendiculare.

4.2.6. Elipsoidul de inertie

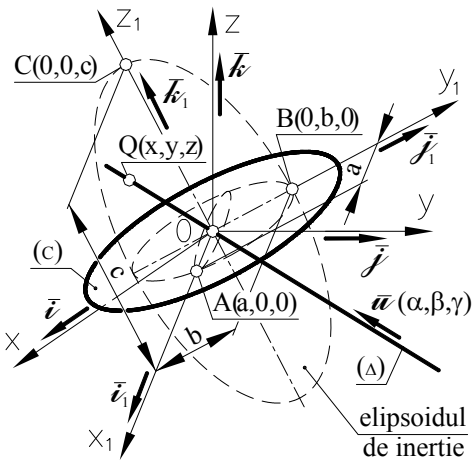


Fig. 4.15

Expresia (4.77), reprezentând legea de variaţie a momentului de inerţie în raport cu axe concurente, poate fi susceptibilă de o interpretare geometrică dacă pe axa (Δ) de orientare (α, β, γ) se consideră un punct "Q" astfel incât:

$$OQ = \frac{H}{\sqrt{J_\Delta}} \tag{4.120}$$

unde J_Δ este momentul de inerție mecanic al corpului fața de axa (Δ), iar H este o constantă de dimensiune astfel încât fracția din membrul doi sa aibă dimensiune de lungime. În particular, constanta "H" poate lua valoarea "1" (H=1).

Se cere aflarea locului geometric al punctului Q atunci când axa (Δ) își schimbă orientarea.

Vom nota cu "x, y, z" coordonatele punctului Q în sistemul de referință Oxyz (fig. 4.15). Cosinusurile directoare ale axei (Δ) pot fi exprimate astfel:

$$\alpha = \frac{x}{OQ} = x\frac{\sqrt{J_\Delta}}{H};\ \beta = \frac{y}{OQ} = y\frac{\sqrt{J_\Delta}}{H};\ \alpha = \frac{z}{OQ} = z\frac{\sqrt{J_\Delta}}{H} \tag{4.121}$$

Înlocuind (4.121) în (4.77) obținem locul geometric căutat:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = H^2 \tag{4.122}$$

Rezultă că locul geometric al punctului "Q" este o cuadrică închisă cu centrul în "O" denumită de Poinsot (Poinsot, Louis, 1777-1859) *elipsoid de inerție* corespunzator punctului "O". Acesta reprezintă imaginea geometrică a legii de variație a momentului de inerție în raport cu axele concurente în "O".

Presupunând cunoscut elipsoidul de inerție relativ la punctul "O", momentul de inerție față de o axa (Δ) care trece prin "O" se determină împărțind constanta "H" la pătratul distanței dintre "O" şi unul din punctele "Q" în care axa (Δ) înțeapă elipsoidul:

$$J_\Delta = \frac{H}{OQ^2} \tag{4.123}$$

Față de sistemul $Ox_1y_1z_1$, construit pe axele de simetrie ale elipsoidului, ecuația este:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \tag{4.124}$$

în care "a", "b", "c" sunt semiaxele elipsoidului. Plasând pe "Q" succesiv în punctele "A", "B" şi "C" se observă, pe baza relației (4.123) în care "OQ" ia succesiv valorile "a", "b", "c", că momentul de inerție "J_Δ" devine maxim, minim-maxim si minim. Deci axele de simetrie ale elipsoidului sunt axele principale de inerție ale corpului corespunzatoare punctului "O".

Inlocuind în (4.124) pătratele semiaxelor “a”, “b”, “c” cu expresiile lor din (4.120):

$$a^2 = \frac{1}{J_1};\ b^2 = \frac{1}{J_2};\ c^2 = \frac{1}{J_3} \tag{4.125}$$

obținem o nouă formă a ecuației elipsoidului în raport cu un sistem de referință construit pe axele principale de inerție:

$$J_1 x_1^2 + J_2 y_1^2 + J_3 z_1^2 = H^2 \tag{4.126}$$

Din compararea relațiilor (4.122) şi (4.126) se constată că în ultima lipsesc termenii care conțin momentele de inerție centrifugale. Se confirmă încă o dată că în raport cu axele principale de inerție momentele de inerție centrifugale sunt nule:

$$J_{x_1y_1} = J_{y_1z_1} = J_{z_1x_1} = 0 \tag{4.127}$$

Proprietăți ale elipsoidului de inerție

1. Elipsoidul de inerție corespunzător centrului maselor se numeşte *elipsoid central de inertie*. În cazul unui corp omogen acest elipsoid urmăreşte forma acestuia.

2. Orice axă de simetrie a unui corp omogen este axă principală de inerție pentru toate punctele ei.

3. În orice punct al axei de simetrie a unui corp de revoluție, elipsoidul de inerție este unul de rotație în raport cu această axă. Pentru demonstrație vom considera axa Oz_1 drept axa de rotație. Rezultă : $J_1=J_2$. Ecuația (4.126) devine:

$$J_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + J_3 z_1^2 = H^2 \tag{4.128}$$

şi reprezintă un elipsoid de rotație în jurul axei Oz_1.

4. Pentru ca un elipsoid definit de ecuația:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \tag{4.129}$$

să fie elipsoid de inerție trebuie ca semiaxele sa respecte condițiile:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2};\ \ \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2};\ \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{b^2} \tag{4.130}$$

Inegalitățile (4.130) se obțin din (4.62):

$$J_1 + J_2 \geq J_3;\ J_2 + J_3 \geq J_1;\ J_3 + J_1 \geq J_2 \tag{4.131}$$

ținându-se seama de relațiile (4.125).

5. În cazul unor mase repartizate numai în planul xOy ecuația (4.122) devine:

$$J_x x^2 + J_y y^2 - 2J_{xy} xy = H^2 \tag{4.132}$$

şi reprezintă *elipsa de inerție* relativă la punctul O.

În raport cu axele principale de inerție, elipsa de inerție va avea ecuația:

$$J_1 x_1^2 + J_2 y_1^2 = H^2 \tag{4.133}$$

Presupunând că $J_2<J_1$, față de orice axa (Δ) care trece prin "O" şi este conținută în planul xOy vom avea:

$$J_2 \leq J_\Delta \leq J_1 \tag{4.134}$$

Înlocuind în (4.133) $J_1 = M i_1^2$, $J_2 = M i_2^2$ si $H^2 = M i_1^2 i_2^2$, rezultă o altă expresie a elipsei de inerție:

$$\frac{x_1^2}{i_2^2} + \frac{y_1^2}{i_1^2} = 1 \tag{4.135}$$

i_1 si i_2 fiind *razele principale de inerție*.

Axele principale de inerție fac cu axa Ox unghiurile φ_1 respectiv φ_2 care sunt rădăcinile ecuației trigonometrice (4.119):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \tag{4.136}$$

5. STATICA RIGIDULUI

5.1. Echilibrul solidului rigid liber

5.1.1. Parametrii geometrici care definesc poziția unui corp rigid în spațiu. Grade de libertate

Prin solid liber rigid se înțelege un corp rigid care poate ocupa orice poziție în spațiu, fară nici o restricție de natură geometrică, poziția lui fiind determinată numai de către forțele care acționează asupra sa.

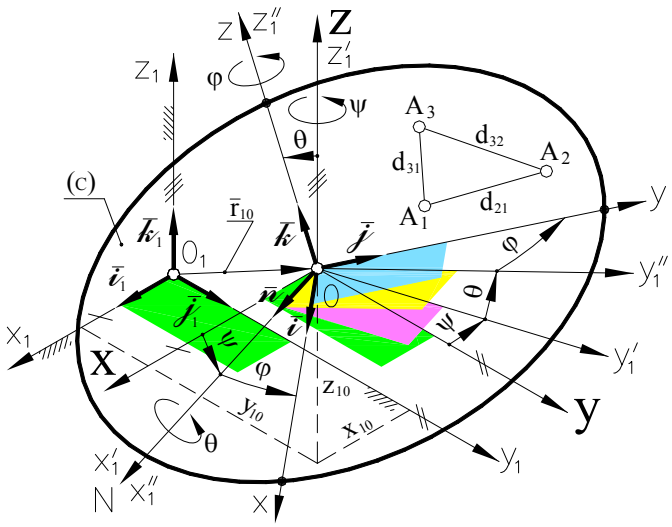


Fig. 5.1

Numărul gradelor de libertate ale unui rigid este dat de numărul parametrilor independenți care îi definesc poziția la un moment dat.

În figura 5.1 este reprezentat un corp rigid (C) situat într-un sistem de referință fix $O_1x_1y_1z_1$. Corpului i se ataşează un reper propriu Oxyz, legat de corp. Poziția rigidului este cunoscută dacă se dau pozițiile, față de reperul fix, a trei puncte A_1, A_2, A_3, aparținând acestuia. La rândul lui fiecare punct este definit prin trei coordonate carteziene. În total sunt nouă parametri, dar numai şase sunt independenți, deoarece distanțele dintre puncte rămân constante:

$$\begin{aligned}
(x_{12}-x_{11})^2-(y_{12}-y_{11})^2-(z_{12}-z_{11})^2&=d_{21}^2\\
(x_{13}-x_{12})^2-(y_{13}-y_{12})^2-(z_{13}-z_{12})^2&=d_{32}^2\\
(x_{11}-x_{13})^2-(y_{11}-y_{13})^2-(z_{11}-z_{13})^2&=d_{13}^2
\end{aligned}\qquad (5.1)$$

Rezultă că numărul gradelor de libertate ale unui solod rigid liber este şase. În practică nu se lucrează cu cele nouă coordonate, între care există relaţiile (5.1), ci se aleg convenabil cei şase parametri geometrici independenţi şi anume:

- coordonatele x_{10}, y_{10}, z_{10}, ale unui punct O al rigidului şi
- unghiurile lui Euler (Euler, Leonhard, 1707-1783) ψ, θ, φ sau cosinusurile directoare ale axelor reperului mobil Oxyz faţă de axele reperului fix $O_1x_1y_1z_1$.

Unghiul ψ, numit *unghi de precesie*, este unghiul pe care *axa nodurilor* ON îl face cu axa Ox_1', paralelă cu O_1x_1. Axa nodurilor rezultă din intersecţia planului mobil Oxyz cu planul $O_1x_1'y_1'$, paralel cu planul fix $O_1x_1y_1$.

Unghiul θ, numit *unghi de nutaţie*, este unghiul dintre axa Oz şi Oz_1', paralelă cu O_1z_1.

Unghiul φ, numit *unghi de rotaţie proprie*, este unghiul dintre axa Ox şi axa nodurilor ON.

Considerând că în poziţia iniţială reperul Oxyz este suprapus peste $O_1x_1y_1z_1$, poziţia finală din figură este atinsă dând corpului următoarele şase deplasări (mişcări simple):

- trei deplasări liniare succesive în lungul axelor reperului fix, respectiv cu x_{10}, y_{10}, z_{10}, altfel spus obligând corpul sa execute o mişcare de translaţie pentru ca punctul O sa ajungă în poziţia prescrisă;
- o rotaţie cu unghiul ψ în jurul axei O_1z_1', paralelă cu O_1z_1;
- o rotaţie cu unghiul θ în jurul axei nodurilor ON;
- o rotaţie cu unghiul φ în jurul axei Oz.

Notăm cu α_1 ,β_1 ,γ_1 cosinusurile directoare ale axei Ox, cu α_2 ,β_2 ,γ_2 cosinusurile directoare ale axei Oy şi cu α_3 ,β_3 ,γ_3, cosinusurile directoare ale axei Oz, în reperul fix. Între aceastea subzistă relaţiile:

$$\alpha_i \cdot \alpha_j + \beta_i \cdot \beta_j + \gamma_i \cdot \gamma_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{daca} \quad i = j; \quad i, j = 1,2,3 \\ 0 & \text{daca} \quad i \neq j \quad i, j = 1,2,3 \end{cases} \tag{5.2}$$

Cosinusurile directoare ale axelor reperului Oxyz în reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ se pot exprima în funcţie de unghiurile Euler:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = c\psi\, c\varphi - s\psi\, s\varphi\, c\theta; & \alpha_2 = -c\psi\, s\varphi - s\psi\, c\varphi\, c\theta; & \alpha_3 = s\psi\, s\theta; \\ \beta_1 = s\psi\, c\varphi + c\psi\, s\varphi\, c\theta; & \beta_2 = -s\psi\, s\varphi + c\psi\, c\varphi\, c\theta; & \beta_3 = -c\psi\, s\theta; \\ \gamma_1 = s\varphi\, s\theta; & \gamma_2 = c\varphi\, s\theta; & \gamma_3 = c\theta; \end{array} \tag{5.3}$$

Funcţiile trigonometrice “sinus” şi “cosinus” au fost notate prescurtat cu “s”, respectiv “c”.

În cazul unei plăci aflate într-un plan (fig. 5.2), poziţia sa faţă de un reper fix legat de plan este detreminată dacă se cunosc poziţiile a două puncte

A_1si A_2, care la rândul lor sunt caracterizate de patru coordonate carteziene ce respecta condiția:

$$(x_{12}-x_{11})^2-(y_{12}-y_{11})^2-(z_{12}-z_{11})^2=d_{21}^2 \tag{5.4}$$

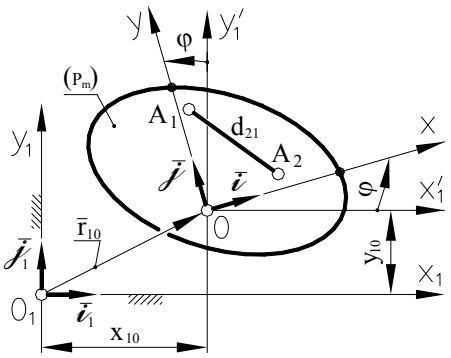


Fig. 5.2

Prin urmare o placă liberă aflată într-un plan are trei grade de libertate. Cei trei parametri independenți care definesc gradele de libertate ale plăcii pot fi:

- coorodonatele x_{10} şi y_{10}, ale unui punct O al plăcii în reperul fix şi
- unghiul de rotație φ dintre axa Ox a reperului Oxy legat invariabil de placă şi axa O_1x_1' paralelă cu O_1x_1.

5.1.2. Ecuațiile de echilibru ale solidului rigid liber

Condiția necesară şi suficientă pentru ca un solid rigid liber, asupra căruia acționează un sistem de forțe oarecare (fig. 5.3), să fie în echilibru este ca torsorul sistemului de forțe în raport cu un punct O arbitrar ales să fie nul:

$$\overline{R}=0;\ \overline{M}_O=0 \tag{5.5}$$

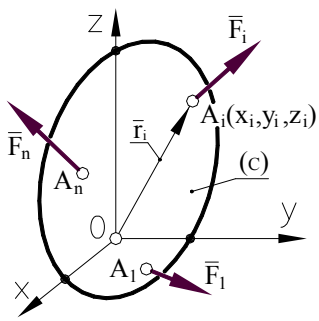


Fig. 5.3

Această afirmație este o consecință a aplicării teoremei de echivalență a două sisteme de forțe şi a principiului inerției. Un sistem de forțe care îndeplineşte condițiile (5.5) se numeşte vid. În orice alt punct se face reducerea, aplicând legea de variație a momentului rezultant la schimbarea polului de reducere, se ajunge tot la un torsor nul. Conform principiului inerției un torsor nul nu are nici un efect asupra punctului în care este aplicat, deci toate punctele rigidului rămân în echilibru şi evident şi rigidul.

Proiectând ecuațiile vectoriale (5.5) pe axele unui sistem de referință Oxyz se obțin ecuațiile de echilibru scalare ale rigidului liber:

$$R_x \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ R_y \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ R_z \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

$$M_x \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right) = 0;\ M_y \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right) = 0;\ M_z \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = 0 \tag{5.6}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (5.6) pot fi rezolvate trei categorii de probleme:

a) Se cunosc forțele care acționează asupra rigidului şi se cere determinarea poziției de echilibru prin coordonatele generalizate x_{10}, y_{10}, z_{10}, ψ, θ, φ;

b) Se dă poziția de echilibru şi se cer forțele care asigură această poziție;

c) Se cunoaşte parțial poziția de echilibru şi parțial sistemul de forțe şi se cere determinarea completă a poziției de echilibru şi a sistemului de forțe.

Daca numărul necunoscutelor este şase atunci, în general, se obțin soluții bine determinate.

În cazul forțelor paralele (fig. 5.4) şi forțelor coplanare (fig. 5.5) numărul ecuațiilor scalare de echilibru este trei, celelalte trei fiind satisfăcute identic:

- pentru figura 5.4,

$$R_x \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ M_y \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{ix}\right) = 0;\ M_z \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(-y_i F_{ix}\right) = 0 \tag{5.7}$$

- pentru figura 5.5,

$$R_x \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ R_y \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ M_z \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = 0 \tag{5.8}$$

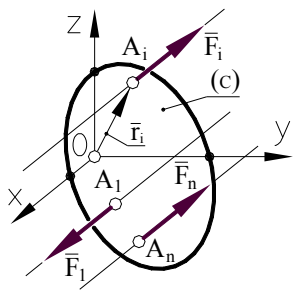


Fig. 5.4

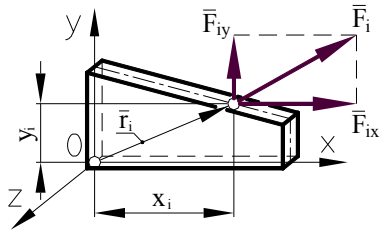


Fig. 5.5

5.2 Echilibrul solidului rigid supus la legături fară frecare

Legăturile cu mediul înconjurător ale unui corp, în sens fizic, sunt reprezentate de contacte punctuale, liniare sau superficiale cu alte corpuri din mediul înconjurător. Ca urmare, corpul în cauză este supus anumitor restricţii de natură geometrică.

Axioma legăturilor rămâne valabilă şi în cazul rigidului supus la legături, conform căreia: "*Orice legatură poate fi inlocuită cu forţe şi/sau cupluri de legatură (reacţiuni) care reprezintă echivalentul mecanic al legăturii. Sub acţiunea forţelor date şi a celor de legătură rigidul poate fi considerat liber şi tratat ca atare.*"

Fie $\overline{R}$ şi $\overline{M}_O$ elementele torsorului forţelor date care acţionează asupra rigidului şi $\overline{R}_1$ şi $\overline{M}_{1O}$ elementele torsorului de reducere, în acelaşi punct, al forţelor de legatură.

Ecuaţiile vectoriale de echilibru ale rigidului supus la legături fără frecare, ţinând seama de axioma legăturilor, sunt:

$$\overline{R} + \overline{R}_1 = 0;\ \overline{M}_O + \overline{M}_{1O} = 0 \tag{5.9}$$

la rândul lor echivalente cu şase ecuaţii de echilibru scalare:

$$\begin{aligned} &R_x + R_{1x} = 0;\ R_y + R_{1y} = 0;\ R_z + R_{1z} = 0 \\ &M_x + M_{1x} = 0;\ M_y + M_{1y} = 0;\ M_z + M_{1z} = 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dacă într-o problemă de echilibru a unui rigid supus la legături fără frecare numărul total de necunoscute scalare (reacţiuni plus parametrii geometrici independenţi care determină poziţia de echilibru) este şase atunci, în general, sistemul (5.10) are soluţie bine determinată.

Cele mai întâlnite legături fără frecare ale solidului rigid sunt: reazemul simplu, cupla sferă-curbă, cupla cilindru-plan, cupla plan-plan, articulaţia sferică, cupla cilindrică, cupla de rotaţie, cupla prismatică, încastrarea, legătura prin fir şi prin bară articulată la amândouă capetele.

5.3. Legăturile fără frecare ale rigidului

5.3.1. Reazemul simplu

Dacă un punct al unui corp (C) este obligat să rămână pe o suprafaţă fixă şi indeformabilă, legătura se numeşte reazem simplu sau simplă rezemare.

În figura 5.6 este reprezentat un corp (C) al cărui punct O rămâne pe suprafața de ecuație:

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0 \tag{5.11a}$$

Legătura suprimă rigidului un grad de libertate pentru că, din cei şase parametri care determină poziția rigidului, trei (şi anume coordonatele punctului O) trebuie să verifice ecuația suprafeței:

$$f(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = 0 \tag{5.11b}$$

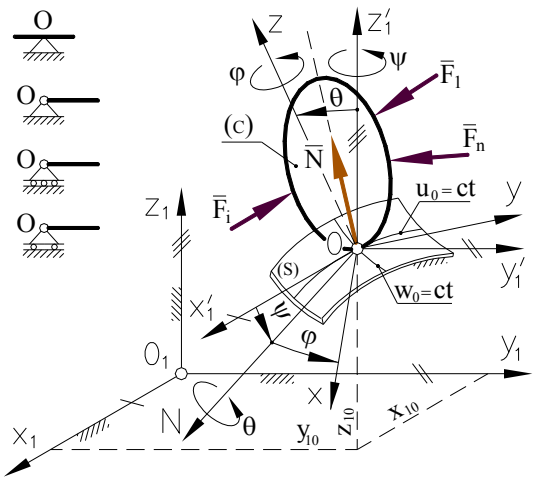


Fig. 5.6

Cei cinci parametri independenți care definesc gradele de libertate ale rigidului vor fi coordonatele curbilinii u_0 şi w_0 ale punctului O pe suprafață şi unghiurile lui Euler ψ, θ, φ.

Legătura nu permite deplasarea rigidului de-a lungul normalei la suprafață în punctul de contact, forța de legătură fiind plasată pe această normală:

$$\overline{R}_1 = \overline{N} = \lambda \nabla f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \bar{j}_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \bar{k}_1 \right) \tag{5.12}$$

Deci legătura introduce în ecuațiile de echilibru scalare o singură necunoscută: valoarea reacțiunii normale sau parametrului λ.

In figura 5.7 este prezentat un caz concret de legatură de acest gen, numită cuplă sferă-suprafață, la care o sferă aparținând corpului (C) se sprijină pe o suprafață fixă. Legatura funcționează numai într-un sens şi de aceea se

numeşte unilaterală. O legatură bilaterală sferă-suprafață este prezentată în figura 5.8.

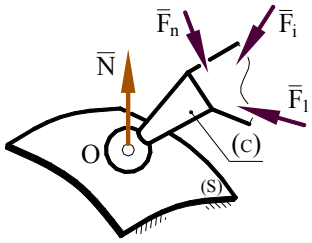


Fig. 5.7

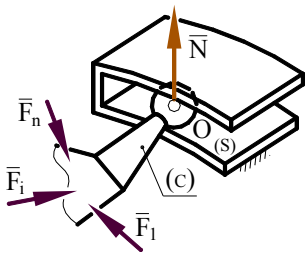


Fig. 5.8

5.3.2. Cupla sferă-curbă

Cupla sau legătura sferă-curbă este constituită dintr-o sferă care aparține rigidului obligată să rămână în interiorul unui tub rectiliniu sau curbiliniu de acelaşi diametru (fig 5.9). Centru sferei O se află în permanență pe axa tubului, adică pe o curbă de ecuații:

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0;\ f_2(x_2, y_2, z_2) = 0 \tag{5.13}$$

Legătura suprimă corpului două grade de libertate întrucât coordonatele punctului O trebuie sa verifice ecuațiile curbei:

$$f_1(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = 0;\ f_2(x_{20}, y_{20}, z_{20}) = 0 \tag{5.14}$$

Prin urmare rigidul (C) are patru grade de libertate, poziția sa fiind definită de patru parametri geometrici independenți: coordonata curbilinie u a punctului O pe curba fixă (Γ) şi unghiurile lui Euler ψ, θ, φ. Această legatură nu permite deplasarea rigidului in planul normal la curbă. Ca urmare reacțiunea este conținută în planul normal şi pentru a fi determinată trebuie cunoscute proiecțiile sale pe doua direcții din planul normal, definit de normala principală şi binormală sau de cei doi vectori normali la cele două suprafețe din intersecția cărora rezultă curba.

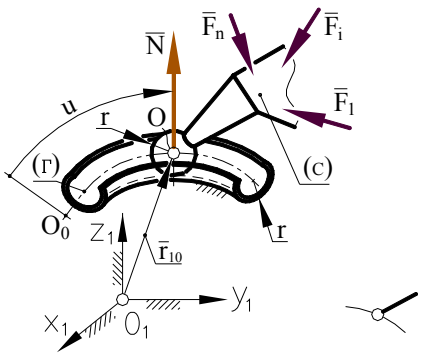


Fig. 5.9

Legatura sfera-curbă introduce în ecuațiile de echilibru scalare două necunoscute: proiecțiile N_ν şi N_β ale reacțiunii pe normala principală şi pe binormală, sau parametrii λ_1 si λ_2 din expresia:

$$\begin{aligned}\overline{R}_1 &= \overline{N} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 = \\ &= \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \bar{i}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \bar{j}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \bar{k}_1 \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \bar{i}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \bar{j}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \bar{k}_1 \right)\end{aligned} \quad (5.15)$$

5.3.3. Cupla cilindru-plan

Acest tip de legatură este prezentat în figurile 5.10 (legatură unilaterală) şi 5.11 (legatură bilaterală). Contactul dintre corpul (C) şi planul de sprijin se realizează după un segment de dreaptă reprezentat în acest caz de generatoarea cilindrului. Aşadar un segment de dreaptă al corpului este obigat să rămână întru-un plan.

Forțele de legatură distribuite pe generatoarea de contact, normale pe plan şi pe clilindru, se reduc într-un punct O al axei cilindrului (centrul cuplei) la un torsor format din doi vectori perpendiculari:

$$\overline{R}_1 = \overline{R}_{1z} = \overline{N} = \int_A n\bar{k} \cdot dx \; ; \; \overline{M}_{1O} = \overline{M}_{1y} = \int_A x\bar{i} \times n\bar{k} \cdot dx \quad (5.16)$$

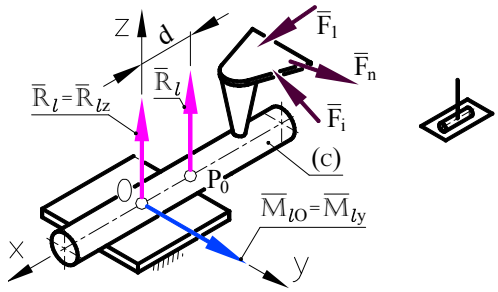


Fig. 5.10

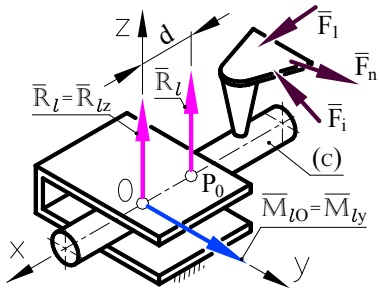


Fig. 5.11

În raport cu punctele axei centrale, situată la distanța $d = M_{ly} / R_{lz}$ față de O, forțele de legatură se reduc la o rezultantă unică $R_1=R_{1z}$. Legătura introduce în ecuațiile de echilibru scalare două necunoscute: R_{1z} şi M_{1y} sau R_{1z} şi d. Ea nu permite deplasarea rigidului de-a lungul normalei la plan (axa Oz) şi rotația în jurul axei Oy (perpendiculara pe axa cilindrului şi pe normala la plan). Deci, cupla clilindru-plan suprimă rigidului două grade de libertate corespunzatoare mişcărilor simple interzise, rigidului rămânându-i patru grade de libertate

corespunzatoare celor patru mişcări simple permise, două deplasări liniare în planul xOy şi două deplasări unghiulare în jurul axelor Ox şi Oz.

5.3.4. Cupla plan-plan

Acest tip de legătură obligă un plan al rigidului să rămâna în contact cu un alt plan. Schița unei legături plan-plan unilaterale este redată în figura 5.12, iar a uneia bilaterale în figura 5.13. Legătura suprimă rigidului deplasarea în lungul normalei comune Oz la cele două plane şi rotațiile în jurul celorlalte două axe Ox şi Oy din planul paralel cu planul fix, ceea ce justifica plasarea în schițe a vectorului rezultant şi a componentelor momentului rezultant ale forțelor de legătură. Deci, legătura plan-plan suprimă rigidului trei grade de libertate şi îi permite tot trei grade de libertate: doua translații liniare în planul xOy şi o rotație în jurul axei Oz.

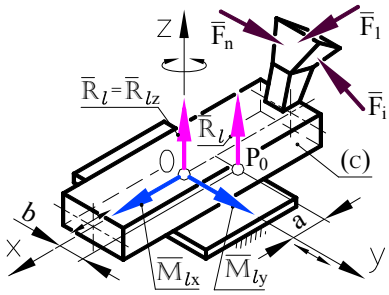


Fig. 5.12

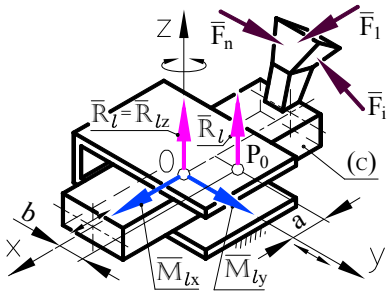


Fig. 5.13

Întrucât vectorii: $\overline{R}_1 = \overline{R}_{1z}$ şi $\overline{M}_{1O} = \overline{M}_{1x} + \overline{M}_{1y}$, reprezentând elementele torsorului de reducere al forțelor de legatură, sunt perpendiculari, aceste forțe se reduc în raport cu axa centrală la o rezultantă unică $\overline{R}_1 = \overline{R}_{1z}$. Axa centrala intersectează planul xOy în punctul P_0 de coordonate $x_0 = a = -M_{1y} / R_{1z}$ şi $y_0 = b = M_{1x} / R_{1z}$.

O cuplă plan-plan introduce în ecuațiile de echilibru scalare trei necunoscute: R_{1z}, M_{1x} şi M_{1y}, sau R_{1z}, a şi b.

5.3.5. Articulația sferică

Articulația (cupla) sferică (fig. 5.14) obligă un punct O al rigidului să rămâna într-o poziție dată (fixă). Alegând convenabil sistemele de referință, coordonatele punctului O vor fi: $x_{10}=0$, $y_{10}=0$, $z_{10}=0$. Legătura suprimă corpului trei grade de libertate, interzicând deplasările liniare în lungul celor trei axe de coordonate şi permite rotațiile în jurul aceloraşi axe. Poziția rigidului este determinată de unghiurile lui Euler ψ, θ, φ.

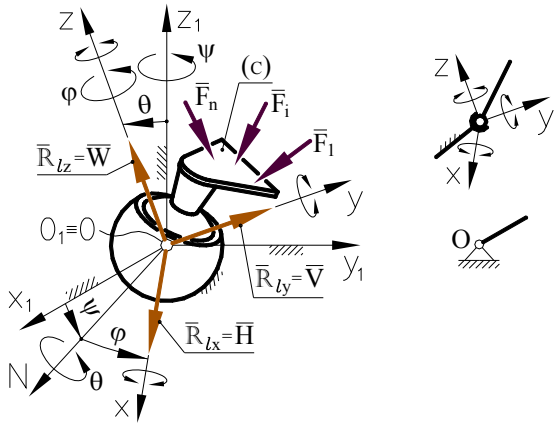


Fig. 5.14

În ecuațiile de echilibru scalare sunt introduse ca necunoscute proiecțiile reacțiunii pe axele reperului Oxyz: R_{1x}=H, R_{1y}=V, R_{1z}=W. Deoarece forțele de legatură distribuite pe suprafața sferei sunt normale pe aceasta şi concurente în O, momentul lor fața de acest punct este nul.

5.3.6. Cupla cilindrică

Această legatură numită şi cuplă de rototranslație (fig. 5.15) obligă un segment de dreaptă al rigidului să-şi păstreze suprotul fix. Alegând sistemele de referință ca în figură, cupla permite rigidului deplasările liniară "u" şi unghiulară "φ" în lungul şi în jurul axei Oz, numită şi axa cuplei. Ca urmare rigidul are două grade de libertate. Corpului îi sunt interzise translațiile liniare şi rotațiile în lungul, respectiv în jurul axelor Ox şi Oy. Poziția rigidului este definita de deplasarile liniară (u) şi unghiulară φ. Cupla introduce în ecuațiile de echilibru scalare patru necunoscute: proiecțiile pe axele Ox şi Oy ale vectorului rezultant: R_{1x}, R_{1y} şi ale momentului rezultant: M_{1x}, M_{1y}.

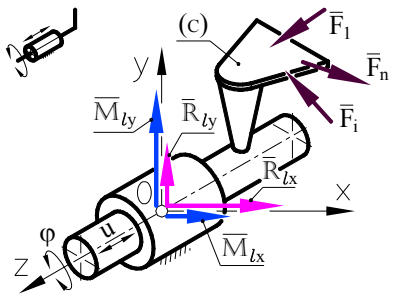


Fig. 5.15

5.3.7. Cupla de rotație

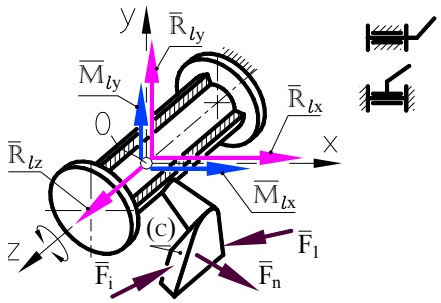


Fig. 5.16

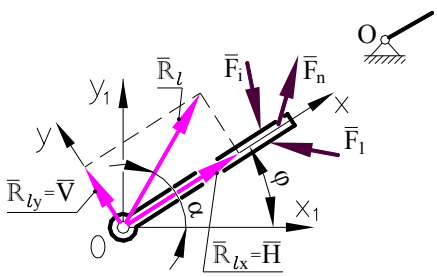


Fig. 5.17

Cupla de rotație obligă două puncte ale rigidului să-şi păstreze poziția fixă. Cele două puncte determină o axă numită axă de rotație. O astfel de legatură este prezentată în figura 5.16. Ea permite rigidului o singură mişcare, cea de rotație în jurul axei fixe Oz, conferindu-i acestuia un singur grad de libertate. Poziția corpului este definită de unghiul de rotație φ.

Sunt interzise deplasările liniare în lungul celor trei axe ale sistemului de referință şi rotatiile în jurul axelor Ox şi Oy, perpendiculare pe axa de roatație, fapt ce justifică plasarea componentelor carteziene ale torsorului de reducere al forțelor de legatură R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, M_{1x}, M_{1y}, componente ce urmează a fi determinate din ecuațiile de echilibru scalare.

Dacă forțele exterioare date sunt toate situate în planul xOy, normal pe axa cuplei în centrul cuplei, legătura se numeşte articulație plană (fig. 5.17). Forțele $\overline{F}_i$, (i=1, 2, .Φ., n), tind să deplaseze bara (C) în lungul axelor Ox şi Oy şi s-o rotească în jurul axei Oz. Articulația O se opune deplasării barei în lungul celor două axe prin componentele R_{1x} şi R_{1y} ale reacțiunii dar nu influențează cu nimic, în ipoteza neglijării frecării, rotația în jurul axei cuplei (Oz). O articulație plană introduce în ecuațiile de echilibru scalare două necunoscute R_{1x}=H şi R_{1y}=V, sau valoarea R_1 a reacțiunii şi unghiul α pe care reacțiunea îl face cu o direcție fixă (de exemplu Ox_1).

5.3.8. Cupla prismatică

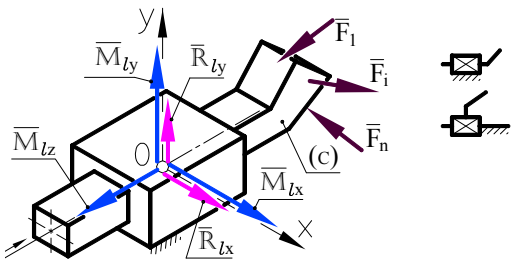


Fig. 5.18

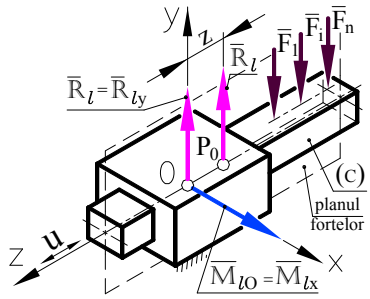


Fig. 5.19

Modelul fizic al unei cuple prismatice sau de translație este redat în figura 5.18. Teoretic, două drepte paralele ale corpului îşi păstrează suporturile fixe. Legătura suprimă corpului cinci grade de libertate, fiind posibilă doar deplasarea liniară în lungul axei Oz a cuplei. Ca urmare rigidul are un singur grad de libertate definit de deplasarea axială "u". Cupla de translație interzice deplasările corpului în lungul axelor Ox şi Oy precum şi rotațiile în jurul celor trei axe ceea ce justifică plasarea celor cinci componente carteziene ale reacțiunii: R_{1x}, R_{1y}, M_{1x}, M_{1y}, M_{1z}, componente ce urmează a fi obținute din ecuațiile de echilibru.

Daca forţele exterioare date sunt situate în planul xOy, ca în figura 5.19, legatura se numeşte cuplă de translaţie plană. Şi în acest caz bara (C) are un singur grad de libertate definit prin deplasarea axiala "u". Legătura, de data aceasta, introduce în ecuaţiile de echilibru numai două necunoscute R_{1y} şi M_{lx}. Deoarece trinomul invariant este nul, sistemul forţelor de legătură se reduce în raport cu punctele axei centrale la o rezultantă unică. Axa centrală este paralelă cu axa Oy şi intersectează axa Oz în punctul P_O de coordonate $x_O=0$, $y_O=0$, $z_O= -M_{lx} / R_{1y}$.

5.3.9. Incastrarea

Dacă un capat al unei bare este fixat într-un zid sau în alt corp prin sudură, betonare, şuruburi, sau alt sistem de fixare, legătura la care este supusă bara în capătul respectiv se numeşte încastrare (fig. 5.20). O încastrare suprimă corpului toate posibilităţile de mişcare (numărul gradelor de libertate este zero). Legătura se opune deplasărilor liniare şi rotaţiilor în lungul şi în jurul celor trei axe ale sistemului de coordonate Oxyz prin componentele carteziene ale elementelor torsorului de reducere al forţelor de legatură: R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, M_{1x}, M_{1y}, M_{1z}, componente ce se determină din cele şase ecuaţii de echilibru scalare.

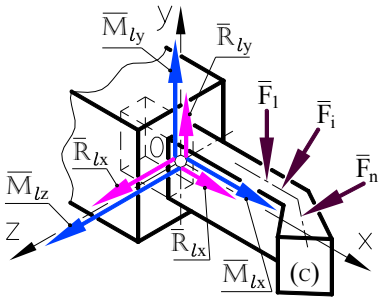


Fig. 5.20

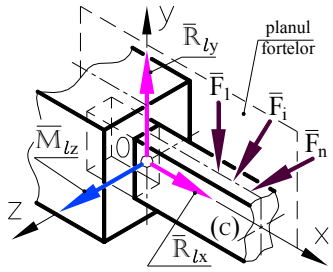


Fig. 5.21

În figura 5.21 este prezentată o încastrare plană a barei (C), solicitată de un sistem de forţe exterioare date situate în planul xOy. Încastrarea plana se opune deplasărilor barei în lungul axelor Ox şi Oy prin componentele carteziene $R_{1x}=H$, $R_{1y}=V$ ale vectorului rezultant al forţelor de legatură şi rotaţiei barei în jurul axei Oz prin momentul $M_{1O}=M_{1z}$ al aceloraşi forţe. În cele trei ecuaţii de echilibru scalare specifice sistemelor de forţe coplanare apar cele trei necunoscute: R_{1x}, R_{1y}, M_{1z}.

5.3.10. Legătura prin fir şi prin bară dublu articulată

Legătura prin fir (fig. 5.22), considerat perfect flexibil şi inextensibil, sau bară cu greutate neglijabilă articulată la ambele capete (fig. 5.23), interzice corpului deplasarea pe direcţia firului intins, respectiv pe direcţia barei. Ca şi

simpla rezemare, acest tip de legatură, suprimă corpului un singur grad de libertate.

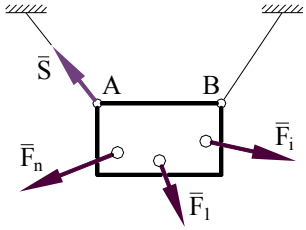


Fig. 5.22

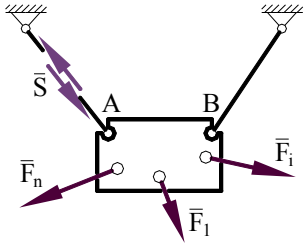
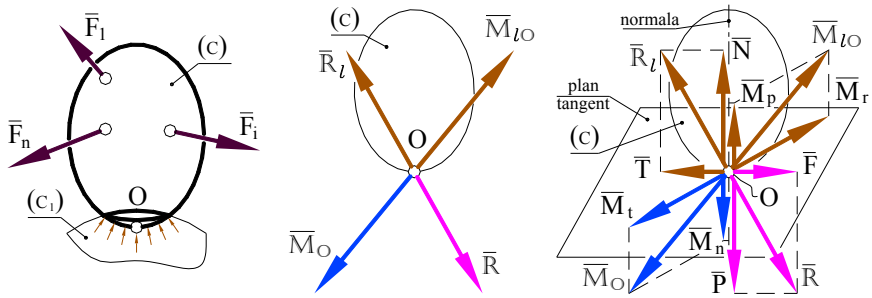


Fig. 5.23

În fir ia naştere o forţă de legatură denumită "tensiune" având punctul de aplicaţie în punctul în care este legat firul de rigid şi suportul dreapta după care este intins firul, sensul fiind de la rigid către punctul de ancorare al firului. Legătura prin fir este o legătură unilaterală deoarece funcţionează numai dacă firul este intins. Forţa de legătură corespunzatoare barei articulate la amândouă capetele, denumită "efort", are direcţia barei iar sensul depinde de acţiunea forţelor exterioare. Legătura prin bară dublu articulată este bilaterală deoarece bara poate fi atât intinsă cât şi comprimată.

5.4. ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE

5.4.1. Generalităţi privind frecările. Condiţii de echilibru



a) b) c)

Fig. 5.24

Se consideră în figura 5.24a un corp (C) care se sprijină pe un alt corp fix (C_1), teoretic într-un singur punct O, practic, datorită deformării corpurilor, pe o anumita suprafaţa, denumită suprafată de contact. Asupra corpului (C) acţioneaza un sistem de forţe date $\overline{F}_i$, (i=1, 2,…, n), al cărui torsor de reducere în O este format din vectorul rezultant $\overline{R}$ şi momentul rezultant $\overline{M}_O$. Practic, se constată că rigidul (C) rămâne în echilibru. Înseamană că forţele de legătură

care apar în punctele suprafeței de contact se reduc în același punct O la un torsor, format din vectorul rezultant $\overline{R}_1$ şi momentul rezultant $\overline{M}_{lO}$, care echilibrează torsorul forțelor date (fig. 5.24b):

$$\overline{R} + \overline{R}_1 = 0;\ \overline{M}_O + \overline{M}_{lO} = 0 \qquad (5.17)$$

Pentru a stabili condițiile de echilibru ale corpului (C), supus la legături cu frecare, se descompun vectorii din ecuațiile (5.17) în componente după normala la suprafața de contact şi planul tangent la aceasta în punctul teoretic de contact (fig 5.24c):

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{F};\ \overline{R}_1 = \overline{N} + \overline{T};\ \overline{M}_O = \overline{M}_n + \overline{M}_t;\ \overline{M}_{lO} = \overline{M}_p + \overline{M}_r \qquad (5.18)$$

Tinând seama de (5.17) rezultă:

$$\overline{P} + \overline{N} = 0;\ \overline{F} + \overline{T} = 0;\ \overline{M}_n + \overline{M}_p = 0;\ \overline{M}_t + \overline{M}_r = 0 \qquad (5.19)$$

Componenta $\overline{P}$ tinde să deplaseze corpul (C) interiorul corpului (C_1), mişcare numită de străpungere. Acestei tendințe i se opune reacțiunea normală $\overline{N}$, egală în modul şi direct opusă componentei $\overline{P}$.

Componenta $\overline{F}$ tinde să deplaseze corpul (C) în planul tangent la suprafața de contact, mişcare numită de alunecare. Se opune acestei tendințe componenta $\overline{T}$ a vectorului rezultant al forțelor de legătură, numita forță de frecare de alunecare. Experimental se demonstrează că alunecarea nu se produce atâta timp cât forța de frecare nu depaşeşte o valoare maximă egală cu produsul dintre coeficientul frecării de alunecare şi reacțiunea normală:

$$T \le \mu N \qquad (5.20)$$

Componenta $\overline{M}_n$ a momentului rezultant al forțelor exterioare date are tendința sa rotească rigidul în jurul normalei, în punctul teoretic de contact la suprafața de contact, mişcare numită de pivotare. Tendinței de pivotare a corpului i se opune componenta $\overline{M}_p$ a momentului forțelor de legătură, denumită moment al frecării de pivotare. Corpul nu pivotează dacă momentul frecării de pivotare este mai mic sau cel mult egal cu momentul maxim al frecarii de pivotare, egal la rândul lui cu produsul dintre coeficientul frecării de pivotare şi reacțiunea normală:

$$M_p \le \nu N \qquad (5.21)$$

Componenta M_t a momentului rezultant al forțelor exterioare date tinde sa rotească rigidul în jurul unei tangente din planul tangent, în punctul teoretic de contact la suprafața de contact, mişcare numită de rostogolire. Tendința de rostogolire a corpului este împiedecată de componenta $\overline{M}_r$ a momentului forțelor de legatură, denumită moment al frecării de rostogolire. Corpul nu se rostogoleşte dacă momentul frecării de rostogolire nu depaşeşte momentul maxim al frecării de rostogolire, care este egal cu produsul dintre coeficientul frecării de rostogolire şi reacțiunea normală:

$$M_r \le sN \qquad (5.22)$$

Dacă sunt îndeplinite condițiile (5.20), (5.21) si (5.22) corpul rămâne în echilibru, adică nu alunecă nu pivotează şi nu se rostogoleşte.

5.4.2. Frecarea de alunecare

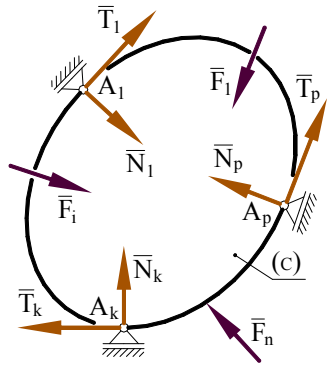


Fig. 5.25

În figura 5.25 este reprezentat un corp (C) simplu rezemat în punctele A_1, A_2, … , A_n şi se presupune ca în aceste puncte nu intervin decât frecari de alunecare. Pentru ca rigidul să rămâna în echilibru, pe lânga ecuațiile (5.17), trebuie sa mai fie îndeplinite condițiile:

$$T_1 \le \mu_1 N_1 ; T_2 \le \mu_2 N_2 ; \ldots ; T_p \le \mu_p N_p \qquad (5.23)$$

Se obține un sistem mixt de şase ecuații şi "p" inecuații destul de dificil de rezolvat deoarece tendința de mişcare a corpului este greu de intuit şi în consecință şi sensurile forțelor de frecare.

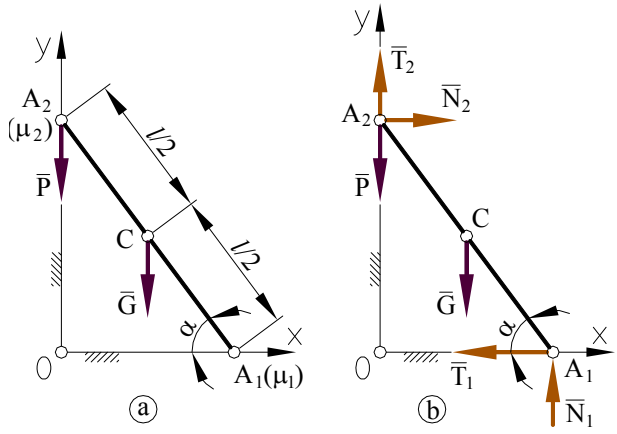


Fig. 5.26

Problema se simplifică dacă inecuațiile (5.23) se transformă în egalități, dar în acest caz se pot pierde multe soluții.

Drept exemplu se dă problema unei scări omogene A_1A_2 (fig 5.26a) de lungime "l" şi greutate "G" rezemată cu frecare în A_1 pe un plan orizontal şi în A_2 pe un perete vertical, coeficientii de frecare

la alunecare fiind "μ_1" si respectiv "μ_2". În capatul A_2 al scării se găseşte un om cu greutatea "P". Se cere determinarea valorii unghiului "α" pentru care scara rămâne în echilibru.

Rezolvare:

1) Se redesenează scara şi se alege un sistem de referinţă Oxy (fig. 5.26b);

2) Pe lângă forţele date $\overline{G}$ si $\overline{P}$ se reprezintă, în punctele A_1 si A_2, reacţiunile $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ şi forţele de frecare $\overline{T}_1$ şi $\overline{T}_2$ ţinând seama de tendinţele de mişcare ale celor doua puncte;

3) Se scriu cele trei ecuaţii scalare de echilibru (două de proiecţii şi una de momente) însoţite de condiţiile de nealunecare în cele două puncte:

$$-T_1 + N_2 = 0; \quad -G - P + N_1 + T_2 = 0;$$
$$N_1 \cdot l\cos\alpha - N_2 l\sin\alpha - G \cdot \frac{1}{2}\cos\alpha = 0 \tag{5.24}$$

$$T_1 \le \mu_1 N_1;\ T_2 \le \mu_2 N_2 \tag{5.25}$$

Un astfel de sistem fiind greu de rezolvat se va considera situaţia echilibrului la limită:

$$T_1 = \mu_1 N_1;\ T_2 = \mu_2 N_2 \tag{5.26}$$

obţinându-se în acest caz valoarea minimă a unghiului α pentru care încă se mai realizează echilibrul scării. Dispunem astfel de un sistem de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute: α, N_1, N_2, T_1, T_2. Rezolvându-l aflăm componentele reacţiunilor şi tangenta unghiului α_{min}:

$$\mathrm{tg}\alpha_{\min} = \frac{(1-\mu_1\mu_2) + 2\dfrac{P}{G}}{2\mu_1\left(1+\dfrac{P}{G}\right)} \tag{5.27}$$

Pentru ca scara sa nu alunece trebuie ca:

$$\alpha \ge \mathrm{arctg}\frac{(1-\mu_1\mu_2) + 2\dfrac{P}{G}}{2\mu_1\left(1+\dfrac{P}{G}\right)} \tag{5.28}$$

Concret, pentru $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ si $P/G = 3$ rezultă, $\alpha = 59{,}35^\circ$.

5.4.3. Frecarea de rostogolire

Pentru punerea în evidenţă a momentului frecării de rostogolire se consideră cazul concret al uei roţi trase aflate pe un plan orizontal (fig. 5.24a). În axul roţii de rază "r" acţionează forţa verticală "G" şi forţa de tracţiune "F".

Presupunând ca rezemarea are loc într-un singur punct (fig. 5.27a) ecuaţiile de echilibru:

$$F - T = 0\,;\, N - G = 0\,;\, -F \cdot r = 0 \qquad (5.29)$$

conduc la rezultatul "F=0", care contrazice realitatea. Roata rămâne în repaus, şi dacă asupra ei acţioneaza o forţă "F" a cărei valoare nu depaşeşte însa o anumită limită. Acest paradox poate fi inlăturat dacă se ţine seama de faptul că fie calea de rulare, fie roata, sau amândouă se deformează şi contactul are loc pe o anumită suprafaţă pe care apar reacţiuni distribuite normale $\bar{n}$ şi tangenţiale $\bar{t}$.

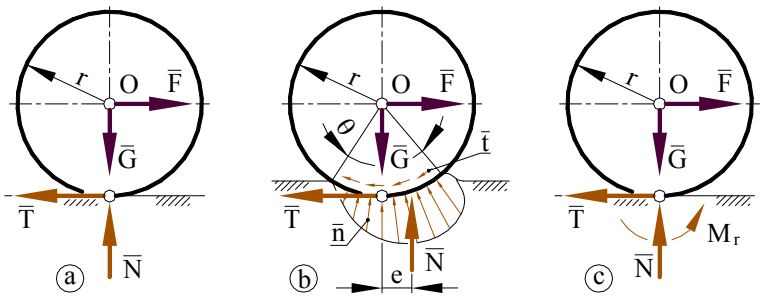


Fig. 5.27

Deoarece, în general, unghiul la centru corespunzător arcului de contact este mic putem considera ca suportul rezultantei $\bar{N}$ a reacţiunilor normale $\bar{n}$ este perpendicular pe plan şi situat la distanţa "e" de punctul teoretic de contact "A", iar suportul rezultantei $\bar{T}$ a reacţiunilor tangenţiale $\bar{t}$ este paralel cu planul şi trece prin punctul teoretic de contact "A" (fig 5.27b). Se reduce reacţiunea normala $\bar{N}$ în punctul "A" la acelaşi vector $\bar{N}$ şi un cuplu de moment $M_r = Ne$ denumit moment al frecării de rostogolire (fig. 5.27c). Ecuaţiile de echilibru ale roţii, în această situaţie sunt:

$$F - T = 0\,;\, N - G = 0\,;\, M_r - F \cdot r = 0 \qquad (5.30)$$

de unde rezultă:

$$N = G\,;\; M_r = Fr\,;\; T = F \qquad (5.31)$$

Echilibrul are loc pentru valori limitate ale modulului forţei de tracţiune:

$$\bar{F} \le \bar{F}_{max} \qquad (5.32)$$

Înmulţim (5.32) cu "r" şi dacă tinem seama de relaţia a doua din (5.31) obţinem condiţia:

$$M_r \le M_{r\,max} \tag{5.33}$$

unde s-a notat $M_{rmax} = F_{max}r$. Deoarece $M_r = Ne$ şi $N = G$ = constant, condiţia (5.33) poate fi pusă sub forma:

$$M_r = Ne_{max} \tag{5.34}$$

care cu notaţia $e_{max}=s$, s fiind numit coeficient al frecării de rostogolire, devine:

$$M_r \le Ns \tag{5.35}$$

Deducem ca "s" reprezintă distanţa maximă la care poate fi deplasat paralel cu el însuşi suportul reacţiunii normale $\overline{N}$ faţă de punctul teoretic de contact, la care roata încă nu se rostogoleşte.

Pentru a fi asigurat echilibrul şi la alunecare trebuie îndeplinită şi condiţia :

$$T \le \mu N \tag{5.36}$$

Este important de reţinut că în problemele de echilibru unde apar tendinţe de rostogolire trebuie impuse ambele inegalităţi, (5.35) şi (5.36).

5.4.4. Frecarea de pivotare

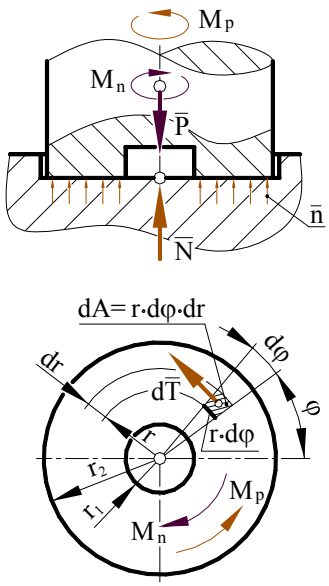


Fig. 5.28

Studiem fenomenul frecării de pivotare în cazul unui arbore vertical ce se sprijină într-un lagăr pe o suprafaţă orizontală având forma unei coroane circulare cu razele r_1 şi r_2 (fig. 5.28). În axul arborelui acţionează forţa $\overline{P}$ şi un cuplu de moment $\overline{M}_n$. Vom presupune că presiunea p şi coeficientul frecării de alunecare μ sunt aceleaşi în toate punctele suprafeţei de contact. Se doreşte aflarea momentului maxim al frecarii de pivotare M_{pmax} şi a coeficientului de pivotare *ν*.

Reacţiunea normală pe unitatea de suprafaţă este egală cu presiunea:

$$n = p = \frac{P}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} = \frac{N}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \tag{5.37}$$

Asupra unei arii elementare (în coordonate polare) $dA = r\,d\varphi\,dr$ de coroană circulară a capătului arborelui acționează o reacțiune elementară normala dN a cărei valoare este egală cu produsul dintre presiune si aria elementară

$$dN = pdA = \frac{N}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} r\,d\varphi\,dr \tag{5.38}$$

şi o forță de frecare elementară dT, tangentă la cercul de raza r ($r_1 \le r \le r_2$), şi dirijată în sens invers tendinței de pivotare, a cărei valoare la limita echilibrului este egală cu produsul dintre coeficientul frecarii de alunecare μ şi reacțiunea elementară dN:

$$dT = \mu dN = \mu \frac{N}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} r\,d\varphi\,dr \tag{5.39}$$

Momentul dat de forța elementară de frecare în raport cu centrul coroanei circulare este:

$$dM_{p\max} = r\,dT \tag{5.40}$$

Momentul frecării de pivotare maxim va fi egal cu suma acestor momente elementare:

$$M_{p\max} = \int_{(S)} r\,dT = \mu \frac{N}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\mu \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} N \tag{5.41}$$

Arborele nu va pivota dacă $M_p \le M_{pmax}$, adică $M_p \le \nu N$. Este evidentă expresia coeficientului frecării de pivotare:

$$\nu = \frac{2}{3}\mu \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \tag{5.42}$$

Dacă sprijinirea se face pe o suprafață circulară cu raza r, făcând în (5.42) $r_2 = r$ şi $r_1=0$, obținem:

$$M_{p\max} = \frac{2}{3}\mu r N \text{ şi } \nu = \frac{2}{3}\mu r \tag{5.43}$$

5.4.5. Frecarea în articulații şi în lagăre

În tehnică se intâlnesc adesea cazuri complexe de frecare cum sunt frecările din articulatii şi lagăre. Osiile sau arborii pe care sunt fixate roțile maşinilor se sprijină prin intermediul fusurilor pe articulații care permit rotația, denumite lagăre. Pentru întârzierea uzurii, lagărele sunt prevăzute cu piese inelare care-l imbracă în interior denumite cuzineți.

Se va studia numai frecarea uscată, utilizarea lubrifianților schimbând esențial problema. După extinderea suprafeței de contact dintre cuzinetul lagărului şi fus, lagărul poate fi considerat nestrâns (cu jos) sau strâns (fără joc).

a) *Cazul lagărului cu joc*

Dacă lagărul nu este strâns, contactul dintre fus şi lagăr poate fi considerat într-un singur punct A (fig. 5.29).

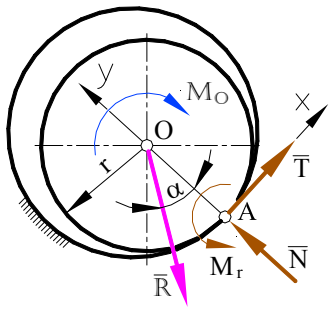


Fig. 5.29

Torsorul forțelor exterioare în punctul O este constituit din momentul motor $\overline{M}_O$ care acționeaza în lungul axului arborelui şi vectorul rezultant $\overline{R}$ situat într-un plan perpendicular pe axul arborelui. Vom nota cu r raza fusului şi cu A punctul teoretic de contact. În punctul A are loc un fenomen de alunecare şi de rostogolire. Forțele de legătură se reduc în punctul A la reacțiunea normală $\overline{N}$, forța de frecare $\overline{T}$ şi momentul frecării de rostogolire $\overline{M}_r$.

În acest caz ecuațiile şi inecuațiile de echilibru sunt:

$$T - R\sin\alpha = 0;\ N - R\cos\alpha = 0;\ M_r - M_O + Rr\sin\alpha = 0; \qquad (5.44)$$

$$T \le \mu N;\ M_r \le sN \qquad (5.45)$$

Din (5.44) deducem:

$$T = R\sin\alpha\,; \quad N = R\cos\alpha\,;\; M_r = M_O + R\,r\sin\alpha \tag{5.46}$$

pe care le introducem în (5.45) şi obţinem condiţiile de echilibru:

$$M_O \le R\,r\left(\sin\alpha + \frac{s}{r}\cos\alpha\right);\; \mathrm{tg}\alpha \le \mu \tag{5.47}$$

La limita echilibrului privind alunecarea:

$$\mathrm{tg}\alpha = \mu\,;\; \sin\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}};\; \cos\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{5.48}$$

şi prima formulă din (5.47) devine:

$$M_O \le \frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}} rR \tag{5.49}$$

Dacă se notează cu:

$$\mu_f = \frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}}, \tag{5.50}$$

coeficientul frecării în lagăr, condiţia (5.49) devine:

$$M_O \le \mu_f\, r\, R \tag{5.51}$$

În punctul O forţele de legătură se reduc la momentul frecării în lagăr $\overline{M}_f$, egal în modul şi direct opus momentului motor $\overline{M}_O$ şi la reacţiunea $\overline{R}_1$, egală în modul şi direct opusă vectorului rezultant $\overline{R}$ al forţelor exterioare. Înlocuind în (5.51) modulul momentului motor M_O cu modulul momentului frecării în lagăr M_f şi modulul vectorului rezultant al forţelor date R cu modulul reactiunii R_1, obţinem condiţia de echilibru sub forma:

$$M_f \le \mu_f r R_1 \tag{5.52}$$

Modulul reacţiunii se determină cu ajutorul componentelor carteziene. Astfel, în cazul unei articulaţii plane $R_1 = \sqrt{H^2 + V^2}$, iar în cazul unei cuple sferice $R_1 = \sqrt{H^2 + V^2 + W^2}$.

b) *Cazul lagărului fără joc*

În acest caz contactul dintre fus şi lagăr se face practic pe o suprafață cilindrică. Într-un punct oarecare de contact apare o reacțiune normală $\overline{N}_i$ şi o forță de frecare $\overline{T}_i$ (fig. 5.30). Momentul frecării în lagăr este egal cu suma momentelor forțelor de frecare în raport cu punctul O.

La limita echilibrului când $T_i = \mu N_i$ obținem momentul maxim al frecării in lagar:

$$M_{f\,max} = \sum_{i=1}^{n} T_i\, r = \sum_{i=1}^{n} \mu\, N_i\, r = \mu\, r \sum_{i=1}^{n} N_i = \mu \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{R_1} r\, R_1 = \mu_f\, r\, R_1 \quad (5.53)$$

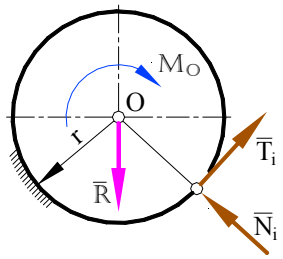


Fig. 5.30

S-a notat cu "R_1", reacțiunea din lagăr calculată în ipoteza că nu există frecare şi cu μ_f coeficientul de frecare în lagăr:

$$\mu_f = \mu \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{R_1} \quad (5.54)$$

Se observă ca acest coeficient depinde de legea de variație a reacțiunilor normale N_i pe suprafața de contact dintre fus şi lagăr. Şi în acest caz pentru echilibru este necesar ca momentul frecării în lagăr să respecte condiția:

$$M_f \le \mu_f\, r\, R_1 \quad (5.55)$$

Rezultatele obținute mai sus sunt acceptabile numai calitativ, coeficienții de frecare μ_f determinându-se experimental.

6. STATICA SISTEMELOR MATERIALE

6.1. Echilibrul sistemelor de corpuri rigide

Un sistem de corpuri (solide) rigide este un ansamblu deformabil sau indeformabil de corpuri rigide care interacționează reciproc. Orice construcție, maşină sau mecanism constituie un asemenea sistem.

Legăturile interioare şi exterioare ale unui sistem de corpuri sunt de tipul celor arătate la studiul echilibrului solidului rigid supus la legături. În baza axiomei legăturilor, ele pot fi înlocuite prin elemente mecanice echivalente, forțe şi cupluri, conform celor arătate în capitolul 5.

La studiul echilibrului sistemelor de corpuri interesează în general următoarele necunoscute: a) valorile parametrilor independenți care determină poziția de echilibru a sistemului; b) reacțiunile din legăturilor exterioare la care este supus sistemul; c) reacțiunile corespunzătoare legăturilor interioare.

Rezolvarea problemelor de echilibru ale sistemelor de corpuri rigide se bazează pe utilizarea a doua teoreme: *teorema solodificării şi teorema echilibrului parților*.

În figura 6.1 se consideră un sistem format din patru corpuri rigide aflat în echilibru. Asupra fiecărui corp "i" acționeaza căte un sistem de forțe echivalent cu un torsor $\tau_{O_i}\ \left(\overline{R}_i, \overline{M}_{O_i}\right)$.

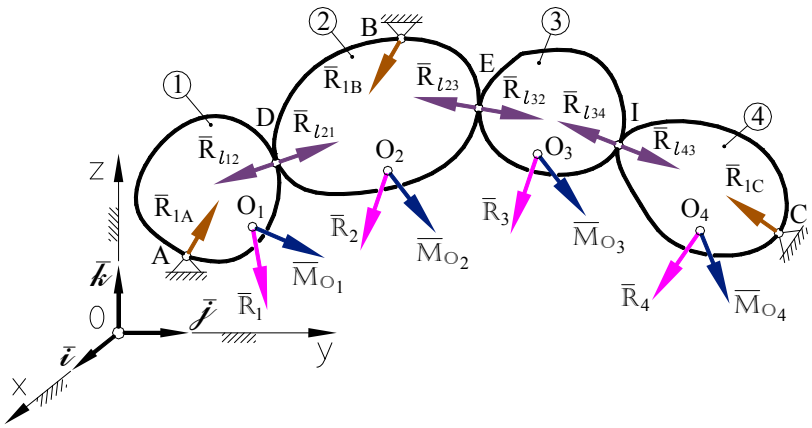


Fig 6.1

Legăturile notate cu A, B şi C sunt legături exterioare, iar cele notate cu D, E, I sunt legături interioare. Conform principiului acțiunii şi reacțiunii, forțele corespunzătoare legăturilor interioare sunt perechi, egale în modul şi direct opuse:

$$\overline{R}_{l_{12}} + \overline{R}_{l_{21}} = 0\,;\ \overline{R}_{l_{23}} + \overline{R}_{l_{32}} = 0\,;\ R_{l_{34}} + \overline{R}_{l_{43}} = 0 \qquad (6.1)$$

Procedând la "eliberarea" corpurilor şi înlocuirea legăturilor cu reacţiunile corespunzatoare, putem scrie condiţiile vectoriale de echilibru pentru fiecare corp:

- pentru corpul 1

$$\overline{R}_1 + \overline{R}_{1A} + \overline{R}_{12} = 0; \tag{6.2}$$

$$\overline{M}_{O_1} + \overline{OO_1} \times \overline{R}_1 + \overline{OD} \times \overline{R}_{12} = 0 \tag{6.3}$$

- pentru corpul 2

$$\overline{R}_2 + \overline{R}_{1B} + \overline{R}_{l_{21}} + \overline{R}_{l_{23}} = 0; \tag{6.4}$$

$$\overline{M}_{O_2} + \overline{OO_2} \times \overline{R}_2 + \overline{OB} \times \overline{R}_{1B} + \overline{OD} \times \overline{R}_{l_{21}} + \overline{OE} \times \overline{R}_{l_{23}} = 0 \tag{6.5}$$

- pentru corpul 3

$$\overline{R}_3 + \overline{R}_{l_{32}} + \overline{R}_{l_{34}} = 0; \tag{6.6}$$

$$\overline{M}_{O_3} + \overline{OO_3} \times \overline{R}_3 + \overline{OE} \times \overline{R}_{l_{32}} + \overline{OI} \times \overline{R}_{l_{34}} = 0 \tag{6.7}$$

- pentru corpul 4

$$\overline{R}_4 + \overline{R}_{1C} + \overline{R}_{l_{43}} = 0; \tag{6.8}$$

$$\overline{M}_{O_4} + \overline{OO_4} \times \overline{R}_4 + \overline{OC} \times \overline{R}_{1C} + \overline{OI} \times R_{l_{43}} = 0 \tag{6.9}$$

Însumând realaţiile (6.2), (6.4), (6.6) şi (6.8), respectiv (6.3), (6.5), (6.7) şi (6.9), ţinând seama de (6.1), obţinem:

$$\overline{R} + \overline{R}_1 = 0;\ \overline{M}_O + \overline{M}_{1O} = 0 \tag{6.10}$$

unde:

$$\overline{R} = \sum_{i=1} \overline{R}_i;\ \ \overline{R}_1 = \overline{R}_{1A} + \overline{R}_{1B} + \overline{R}_{1C}$$

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1} \overline{M}_{O_i} + \sum_{i=1} \overline{OO_i} \times \overline{R}_i;\ \overline{M}_{1O} = \overline{OA} \times \overline{R}_{1A} + \overline{OB} \times \overline{R}_{1B} + \overline{OC} \times \overline{R}_{1C}$$

Relaţiile (6.10) exprimă *teorema solidificării* conform căreia: *condiţia necesară, dar nu şi suficientă, pentru ca un sistem de corpuri rigide să fie în echilibru este ca torsorul forţelor exterioare (date şi de legătură) să fie nul în raport cu un pol oarecare O. Pentru ca această condiţie să fie şi suficientă trebuie ca sistemul să se comporte fizic ca un sistem rigidizat*.

Dacă se studiază condiţiile de echilibru ale unei părţi din sistem, de exemplu formată din corpurile 1 si 2, atunci, însumând relaţiile (6.2) cu (6.4), şi (5.3) cu (5.5) rezultă:

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{R}_i+\overline{R}_{1A}+\overline{R}_{1B}+\overline{R}_{1_{23}}=0$$

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{M}_{O_i}+\sum_{i=1}^{2}\overline{OO_i}\times\overline{R}_i+\overline{OA}\times\overline{R}_{1A}+\overline{OB}\times\overline{R}_{1B}+\overline{OE}\times\overline{R}_{1_{23}}=0 \qquad (6.11)$$

Relaţia de forma (6.11) exprimă *teorema echilibrului parţilor,* conform căreia: *dacă un sistem de corpuri rigide se află în echilibru sub acţiunea forţtelor active şi de legatură care îi sunt aplicate, atunci şi o parte a sistemului se va afla în echilibru sub acţiunea fortelor active şi a reacţiunilor direct aplicate parţii considerate. Legăturile părţii separate cu corpurile rămase în afara părţii devin legături exterioare, în timp ce legăturile dintre corpurile care alcătuiesc partea considerată rămân legaturi interioare*. Prin parte se înţelege şi fiecare corp. *Dacă fiecare corp din sistem este în echilibru sub acţiunea forţelor date şi de legătură corespunzătoare atunci şi sistemul va fi in echilibru.*

Cele două teoreme enunţate mai sus conduc la două metode utilizate în studiul echilibrului sistemelor: *metoda solidificării*, respectiv *metoda echilibrului parţilor*. Dintre cele două metode, ultima este mai frecvent utilizată sub forma echilibrului fiecărui corp şi soluţionează toate necunoscutele unei probleme de echilibru static al sistemelor de corpuri.

6.2. GRINZI CU ZABRELE PLANE

6.2.1. Generalităţi. Ipoteze simplificatoare

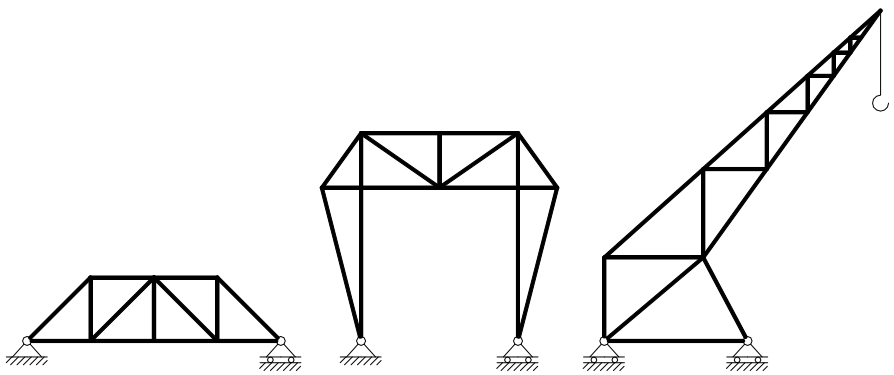


Fig 6.2

Grinzile cu zăbrele plane sunt sisteme de bare rectilinii rigide, legate între ele prin articulaţii numite "*noduri*", situate toate în acelaşi plan. Ele sunt utilizate mai ales în construcţii, ca elemente de rezistenţă sub diferite forme (fig. 6.2): ferme pentru acoperişuri, grinzi pentru poduri şi poduri rulante, schelete de rezistenţa pentru macarale etc.

Pentru ca rigiditatea grinzii cu zăbrele sa fie asigurată fără bare de prisos, este necesar ca între numarul "n" al nodurilor şi numărul "b" al barelor de să existe relația:

$$b = 2n - 3 \qquad (6.12)$$

Această relație se deduce pornind de la observația că un sistem triunghiular format din trei bare rigide şi trei noduri este indeformabil. Dacă se completează triunghiul de baza cu un altul este nevoie numai de două bare şi un nod. Deci, pentru rigidizarea unui nod este nevoie de două bare, dar la rigidizarea primelor 3 noduri au fost utilizate numai 3 bare în loc de şase.

Pentru calculul grinzilor cu zabrele se fac urmatoarele ipoteze simplificatoare:

1. Barele se consideră rectilinii si rigide;
2. Legatura între bare la noduri se face fară frecare prin articulații cilindrice plane; barele sunt fixate perfect axial în noduri.
3. Forțele exterioare acționează asupra sistemului articulat în planul grinzii şi numai concentrat în noduri; greutățile barei şi alte forțe (încărcări) distribuite se înlocuiesc prin forțe echivalente concentrate în noduri.

De aici concluzia că barele grinzii cu zăbrele pot fi solicitate numai la întindere sau compresiune, eforturile reprezentând forțele de legătură din bare având direcția barelor. În figura 6.3a se indică sensul forțelor cu care bara acționează asupra nodurilor dacă este întinsă, iar în figura 6.3b se arată sensul forțelor de legatură dacă bara este comprimată.

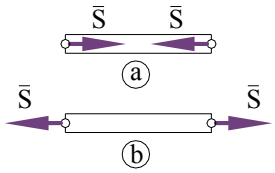


Fig. 6.3

Modelul mecanic al unei grinzi cu zăbrele plane poate fi soluționat în două moduri distincte: i) sistem plan indeformabil de puncte materiale (nodurile) legate rigid prin legături interioare bilaterale (barele) şi fixate pe corpul de reazem prin legături exterioare constând din articulații plane şi reazeme simple sau ii) sistem plan indeformabil de bare rigide legate între ele prin articulații plane punctiforme fixat pe corpul de reazem prin aceleaşi legături exterioare. Având în vedere primul model mecanic şi faptul că fiecare nod este un punct material în echilibru supus acțiunii unui sistem de forțe coplanare şi concurente, se pot scrie pentru echilibrul grinzii un număr de "2n" ecuații de echilibru scalare, câte două ecuații pentru fiecare nod. Deoarece grinda cu zăbrele se comportă ca un solid rigid acționat de forțe exterioare coplanare, numărul necunoscutelor, ce apar la determinarea reacțiunilor nu trebuie sa depaşească cifra trei, în caz contrar problema devine static nedeterminată (nu poate fi solutionată numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru). Din acest motiv grinzile cu zăbrele au de regulă o articulație plană şi un reazem simplu. În afară de reacțiunile exterioare mai trebuie să se determine şi eforturile (forțele de legătură) în bare, al căror număr este egal cu numărul "b"

al barelor. Numărul total de forţe necunoscute va fi "b+3". Pentru ca grinda să fie static determinată e necesar ca numărul ecuaţiilor să fie egal cu numărul necunoscutelor, adică:

$$2n = b + 3. \tag{6.13}$$

Se observă că (6.13) este echivalentă cu condiţia de imobilitate (6.12) găsită pentru grinzile cu zăbrele fără bare de prisos.

Pentru determinarea analitică a eforturilor în bare sunt utilizate mai frecvent două metode: *metoda echilibrului nodurilor* şi *metoda secţiunilor*.

6.2.2. Metoda echilibrului nodurilor

Aceasta metoda se bazează pe teorema echilibrului părţilor considerând ca "parte" a sistemului un nod care, dacă este izolat, reprezintă un punct material, acţionat de forţe concurente coplanare (eforturile din bare şi forţele exterioare concentrare în noduri).

La întocmirea schemelor mecanice se face presupunerea că toate barele sunt solicitate la întindere. Dacă în urma rezolvării sistemului de "2n" ecuaţii liniare, cu tot atâtea necunoscute, rezultă pentru un efort valoare pozitivă, înseamnă ca bara corespunzătoare este întinsă iar dacă valoarea este negativă, înseamna ca bara este comprimată. Pentru simplificare, se obişnuieşte să se determine anticipat reacţiunile legăturilor exterioare prin metoda rigidizarii. Sistemul de ecuaţii de echilibru ale nodurilor se poate rezolva succesiv începând cu nodurile în care se întâlnesc numai două bare.

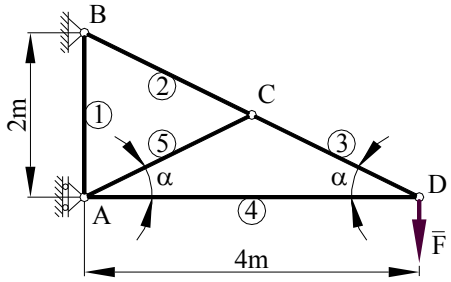


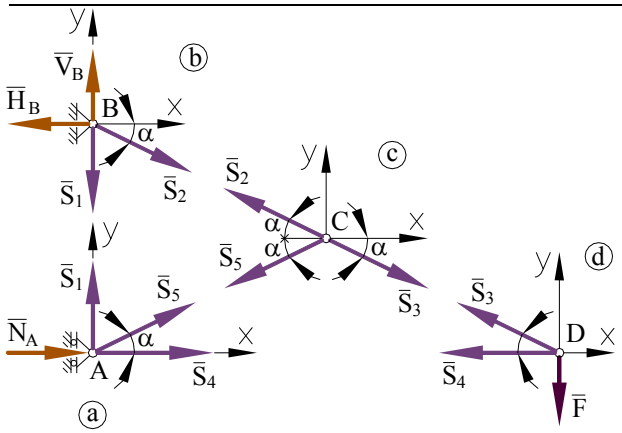
Fig. 6.4

Ca aplicaţie, se propune grinda cu zăbrele plană din figura 6.4, simplu rezemată în A şi articulată plan în B. În nodul D al grinzii acţionează o forţă exterioară $F=3\cdot10^4$N. Se cere determinarea eforturilor din barele grinzii cu zăbrele şi reacţiunile din A şi B.

Se observă ca n=4, b=5, şi deci, relaţia (6.12) este satisfacută, adică grinda cu zabrele este static determinată.

Schemele mecanice pentru fiecare nod izolat din sistem sunt prezentate în figura 6.5. Ecuaţiile de echilibru sunt:

- *pentru nodul A*: $S_4+ S_5 \cos\alpha +H_A = 0$; $S_1+ S_5 \sin\alpha = 0$
- *pentru nodul B*: $-H_B+ S_2\cos\alpha =0$; $V_B - S_1 - S_2 \sin\alpha=0$
- *pentru nodul C*: $S_3 \cos\alpha - S_2 \cos\alpha - S_5 \cos\alpha =0$; $S_2 \sin\alpha - S_5 \sin\alpha - S_3 \sin\alpha = 0$
- *pentru nodul D*: $-S_3 \cos\alpha - S_4 =0$; $S_3 \sin\alpha - F =0$



În acest caz, sistemul de ecuatii se rezolvă începând cu nodul D, ecuațiile corespunzătoare conținând numai două necunoscute.Rezultă:

$$S_3 = \frac{F}{\sin\alpha} = 3\sqrt{5}\cdot 10^4\,\text{N};$$

$$S_4 = -S_3\cos\alpha = -6\cdot 10^4\,\text{N}$$

Fig. 6.5

Substituind aceste valori în celelalte ecuații şi rezolvând apoi succesiv ecuațiile de echilibru corespunzătoare nodurilor C, A şi B, se obțin:

$$S_5=0;\ S_2=3\sqrt{5}\cdot 10^4\,\text{N};\ S_1=0;\ H_A=6.10^4\ \text{N};\ H_B=6.10^4\ \text{N};\ V_B=3.10^4\text{N};$$

$$R_{1B} = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} = 3\sqrt{5}\cdot 10^4\,\text{N}$$

Rezultă că barele “2” şi “3” sunt întinse, bara “4” este comprimată, iar barele “1” si “5” au doar rol constructiv.

Reacțiunile legăturilor exterioare puteau fi determinate de la început studiind echilibrul ansambului grinzii folosind teorema solidificării (fig. 6.6). Ecuațiile de echilibru îacest caz sunt:

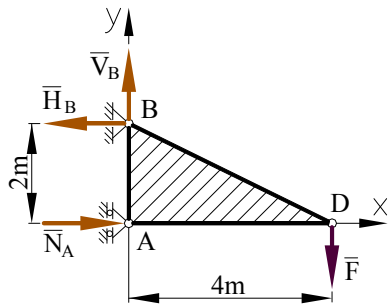


Fig. 6.6

$$H_A - H_B = 0;\quad V_B - F = 0;\quad -4F + 2H_B = 0$$

de unde rezultă:

$$H_A=H_B=6.10^4\ \text{N};\ V_B=3.10^4\ \text{N}.$$

Utilizând aceste rezultate, determinate anticipat, sistemul ecuațiilor de echilibru ale nodurilor conține cu trei necunoscute mai puțin şi se rezolva mai comod.

6.2.3. Metoda secțiunilor (Metoda Ritter) (Ritter, Karl, 1779-1859)

Această metodă se foloseşte în cazurile în care se cere determinarea eforturilor numai în anumite bare ale sistemului articulat, bazându-se pe teorema echilibrului părților. Astfel, se secționează grinda în două părți separabile una de alta, în aşa fel încât secțiunea făcută să întâlnească numai trei bare care nu sunt toate concurente în acelaşi punct şi se studiază echilibrul

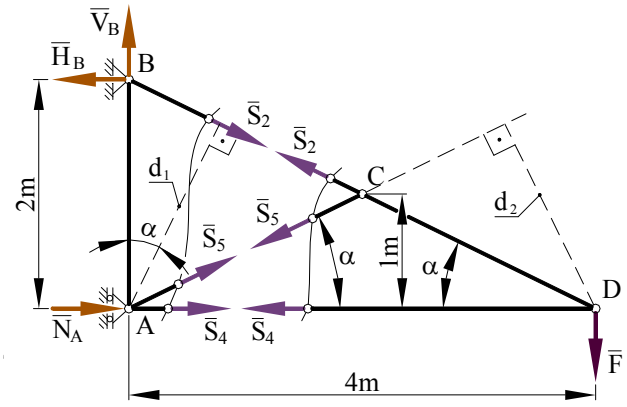


Fig. 6.7

oricăreia din părţile separate. Metoda secţiunilor pretinde obligatoriu determinarea în prealabil a reacţiunilor exterioare, dacă se separă o parte care conţine şi legături exterioare. Aplicăm această metodă pentru determinarea eforturilor în barele 2, 4 si 5 ale grinzii cu zabrele din figura 6.4.

Se efectuează o secţiune prin cele trei bare ale caror eforturi dorim sa le determinăm şi izolam porţiunea din ferma situată la dreapta (sau la stânga) acestei secţiuni (fig. 6.7). În barele secţionate se introduc eforturile presupuse a fi de intindere, calculele urmând să confirme sau să infirme acesta presupunere tială. Studiem echilibrul parţii din dreapta pentru ca este solicitată numai de patru forţe. Metoda analitică a secţiunilor sau metoda Ritter aduce o simplificare, în sensul ca în locul celor 2 ecuaţii de proiecţii şi una de momente, se pot utiliza trei ecuaţii de momente şi una de proiecţii, în cazul în care două din cele 3 bare secţionate sunt paralele. Ecuaţiile de momente se scriu în raport cu punctele de intersecţie ale barelor secţionate.

$$\sum_i M_{C_i} = -2F + 1\cdot S_4 = 0; \qquad S_4=2F=6.10^4 N$$

$$\sum_i M_{A_i} = -4F + d_1\cdot S_2 = 0\,; d_1 = 2\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{5}}; \quad S_2 = \frac{4F}{d_1} = 3\sqrt{5}\cdot 10^4\,N$$

$$\sum_i M_{D_i} = S_5\cdot d_2 = 0\,; \qquad S_5=0$$

6.3 STATICA FIRELOR

Firul reprezintă modelul mecanic al unui corp cvasirigid având dimensiunile secţiunii neglijabile în raport cu lungimea, o flexibilitate mare şi o alungire mică sub acţiunea unei forţe de întindere. În continuare vom presupune că firele sunt sisteme materiale continue perfect flexibile şi inextensibile. În tehnică firele pot fi considerate fire: funiile de oţel sau de cânepă, cablurile electrice, cablurile maşinilor de ridicat, lanţurile, etc.

Sarcinile exterioare care acţionează asupra unui fir pot fi repartizate pe toată lungimea firului, după o lege oarecare $\overline{p} = \overline{p}(s)$, unde "s" reprezintă lungimea arcului de curbă, sau pot fi concentrate în câteva puncte distincte.

Forma geometrică a poziției de echilibru a unui fir sub acțiunea sarcinilor exterioare la care este supus, se numeste *curbă funiculară.* La studiul echilibrului firelor se urmăreşte să se găsească curba de echilibru a firului şi legea de variație a tensiunii din fir, atunci când acesta este supus acțiunii unui sistem de forțe exterioare oarecare.

6.3.1. Ecuațiile generale de echilibru ale firelor suspendate acționate de sarcini continue

In figura 6.8a se consideră un fir suspendat în punctele fixe A şi B şi aflat în echilibru sub acțiunea unei sarcini continue. Notăm cu $\bar{p} = \bar{p}(s)$ rezultanta forțelor exterioare repartizate pe unitatea de lungime de fir şi cu $\bar{p}ds$ sarcina exterioară ce revine unei porțiuni elementare de lungime "ds" din firul considerat (fig. 6.8b).

Se izolează o porțiune din fir cuprinsă între punctele infinit vecine M şi M_1 o lungime "ds" şi se înlocuieşte mecanic echivalent acțiunea porțiunilor de fir înlaturate prin eforturile $-\bar{S}$ şi $\bar{S}+d\bar{S}$ (fig. 6.8b). Pe baza schemei mecanice pot fi scrise cele două ecuații vectoriale de echilibru ale elementului de fir:

$$-\bar{S}+\bar{p}ds+\left(\bar{S}+d\bar{S}\right)=0 \tag{6.14}$$

$$\bar{r}\times\left(-\bar{S}\right)+\left(\bar{r}+d\bar{r}'\right)\times\bar{p}ds+\left(\bar{r}+d\bar{r}\right)\times\left(\bar{S}+d\bar{S}\right)=0 \tag{6.15}$$

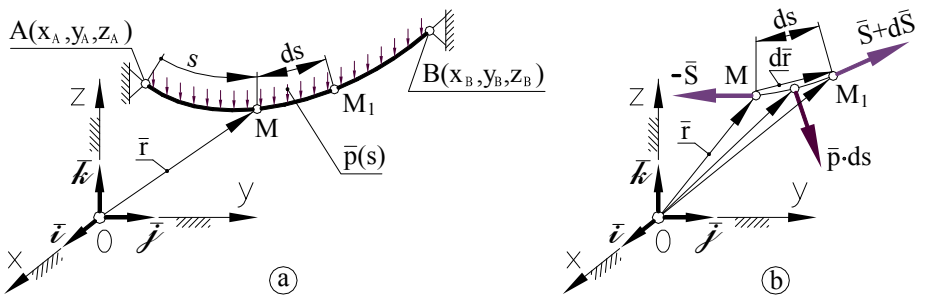


Fig. 6.8

Ecuația (6.14) conduce la ecuația vectorială de echilibru a firelor suspendate:

$$d\bar{S}+\bar{p}ds=0 \text{ sau } \frac{d\bar{S}}{ds}+\bar{p}=0 \tag{6.16}$$

Prin neglijarea infiniților mici de ordinul doi şi luând în considerare ecuația (6.16), relatia (6.15) devine:

$$d\bar{r}\times\bar{S}=0 \tag{6.17}$$

Împărțim această ecuație cu “ds”:

$$\frac{d\bar{r}}{ds}\times\bar{S}=0 \qquad (6.18)$$

Cum $\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{\tau}$ este versorul tangentei la curba funiculară, ecuația (6.18) este echivalentă cu:

$$\bar{S}=S\bar{\tau} \qquad (6.19)$$

ceea ce înseamnă că vectorul tensiune într-un punct al firului este dirijat după tangenta la curba funiculară în acel punct.

Proiectând ecuația vectorială (6.16) pe axele reperului fix Oxyz, se obțin ecuațiile scalare carteziene de echilibru ale firelor suspendate încarcate cu sarcini continue:

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right)+p_x=0;\quad \frac{d}{ds}\left(S\frac{dy}{ds}\right)+p_y=0;\ \frac{d}{ds}\left(S\frac{dz}{ds}\right)+p_z=0 \qquad (6.20)$$

la care se adaugă egalitatea:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad (6.21)$$

Cele patru ecuații diferențiale vor servi la determinarea tensiunii “S”, într-un punct al firului, în funcție de lungimea arcului de curba “s” şi la determinarea ecuațiilor parametrice ale curbei funiculare x=x(s), y=y(s), z=z(s).

Constantele de integrare C_1, C_2, …, C_6 care apar prin integrarea ecuațiilor diferențiale, se determină din condițiile de limită: pentru s=0 avem $x=x_A$, $y=y_A$, $z=z_A$ si pentru s=L avem $x=x_B$, $y=y_B$, $z=z_B$.

Dacă se utilizează sistemul de coordinate intrinseci numit şi triedrul lui Frenet, cu originea în punctual M şi axele formate din tangenta în M de versor $\bar{\tau}$, normala principală în M de versor $\bar{\nu}$ şi binormala în M de versor $\bar{\beta}$ şi dacă se ține seama de *prima formulă a lui Frenet* $\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\bar{\nu}$, în care "ρ" este raza de curbură ecuația (6.16) pusă sub forma $\frac{d(S\bar{\tau})}{ds}+\bar{p}=0$ devine:

$$\frac{dS}{ds}\bar{\tau}+S\frac{d\bar{\tau}}{ds}+\bar{p}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{dS}{ds}\bar{\tau}+\frac{S}{\rho}\bar{\nu}+\bar{p}=0,$$

care proiectată pe axle triedrului lui Frenet conduce la ecuațiile diferențiale de echilibru ale firelor în coordinate întrinseci:

$$\frac{dS}{ds} + p_\tau = 0;\ \frac{S}{\rho} + p_\nu = 0;\ p_\beta = 0 \qquad (6.22)$$

Ultima relație arată că firul ia o formă astfel încât forța $\bar{p}$ să se afle în planul osculator al curbei funiculare.

6.3.2. Echilibrul firului omogen greu suspendat la capete

În cazul unui fir omogen greu sarcina exterioară este dată numai de greutatea proprie a firului. Încărcarea $\bar{p}$ corespunzatoare unitații de lungime (greutatea specifică liniară) este constantă şi verticală.

În figura 6.9 se consideră un fir omogen greu suspendat în punctele fixe A şi B. Se alege un reper Oxyz astfel încat cele două puncte sa fie conținute în planul xOy şi axa Oy să fie paralelă şi de sens contrar forței repartizate.

În aceste condiții, ecuațiile (6.20) se particularizează astfel:

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right) = 0 \qquad (6.23)$$

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dy}{ds}\right) - p = 0 \qquad (6.24)$$

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dz}{ds}\right) = 0 \qquad (6.25)$$

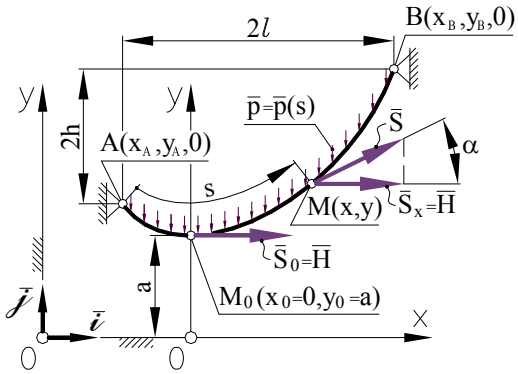


Fig. 6.9

Se integrează prima şi ultima ecuatie:

$$S\frac{dx}{ds} = H,\quad S\frac{dz}{ds} = C,$$

unde H şi C sunt două constante de integrare. Împărtirea celor două relații membru cu membru conduce la ecuatia diferentiala

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C}{H}x + C',$$

de unde prin integrare obținem:

$$z = \frac{C}{H}x + C',$$

C′ fiind o a treia constantă de integrare. Condițiile limită cer ca pentru $x=x_A$, $x=x_B$ cota z sa aibă valoarea "zero". Cum $x_A \neq x_B$, rezultă C/H=0 şi C'=0. Ca urmare, z=0. Aceasta înseamnă că forma de echilibru a firului este o curbă situată în planul xOy.

Integrala ecuației (6.23):

$$S\frac{dx}{ds} = H \text{ (const.)} \tag{6.26}$$

conduce la concluzia ca proiecția tensiunii pe orizontală, în orice punct al firului, este constantă şi egală cu valoarea tensiunii din puctul de cota minimă a curbei funiculare (S_0=H).

Eliminând pe S între expresiile (6.26) si (6.24) şi având în vedere ca în acest caz,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

se obtine ecuația diferențiala a curbei funiculare sub forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{p}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0 \tag{6.27}$$

Cu notația $a = \frac{H}{p}$ şi substituția

$$shu = \frac{dy}{dx} \tag{6.28}$$

ecuația (6.27) devine

$$du = \frac{1}{a}dx \tag{6.29}$$

care, integrată, conduce la

$$u = \frac{1}{a}x + C_1 \tag{6.30}$$

Luând în considerare substituția făcută, rezultă:

$$\frac{dy}{dx} = sh\left(\frac{1}{a}x + C_1\right) \tag{6.31}$$

Prin integrarea ecuației (6.31) se obține ecuația de echilibru a firului greu omogen suspendat la capete, cunoscuta sub numele de *ecuatia lanțișorului*:

$$y = a \cdot ch\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \tag{6.32}$$

Constantele de integrare se determină impunând condițiile de limită pentru punctele A şi B.

Se poate ajunge la o formă mai simplă a ecuației (6.32) dacă se execută o translație a sistemului de axe astfel încât axa Oy să treacă prin punctul M_0, cel mai de jos al firului (x_0=0), iar cota acestuia să devina egală cu marimea $a = \frac{H}{p}$, numită parametrul lanțisorului (y_0=a). În noul sistem de referință

$$y = a \cdot ch\frac{x}{a} \tag{6.33}$$

Formulele (6.32) sau (6.33) rezolvă complet problema formei de echilibru a firului.

Pentru a determina şi tensiunea în fir folosim relația $S = H\frac{ds}{dx}$, dedusă din (6.26). Înlocuind $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ şi $y = a \cdot ch\frac{x}{a}$, obținem:

$$S = H\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H\sqrt{1 + sh^2\frac{x}{a}} = H \cdot ch\frac{x}{a} = \frac{H}{a} \cdot a \cdot ch\frac{x}{a} = p \cdot y\,, \tag{6.34}$$

ceea ce arată că tensiunea dintr-un punct M(x,y) al lănțisorului este egală cu greutatea unei porțiuni de fir egală cu ordonata punctului respectiv.

Tensiunea minima este în punctul M_0(0,a) şi are valoarea:

$$S_0 = H = pa \tag{6.35}$$

Lungimea arcului de lanțişor măsurat între M_0 şi M are expresia:

$$L_x = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^x ch\frac{x}{a} dx = a \cdot sh\frac{x}{a} \qquad (6.36)$$

Este evidentă şi egalitatea:

$$L_x^2 + a^2 = y^2 \qquad (6.37)$$

Pentru determinarea curbei funiculare şi a tensiunii dintr-un punct al firului este necesară determinarea în prealabil a parametrului "a" al lanțisorului. Dacă, de exemplu, se dă lungimea firului 2L şi deschiderea dintre punctele A şi B (x_B-x_A) egala cu 2l, punctele fiind situate la acelaşi nivel, atunci parametrul "a" al lanțisorului rezultă din relația (6.36) în care x=l si L_x=L:

$$a \cdot sh\frac{l}{a} = L \qquad (6.38)$$

Dacă între punctele B şi A există o diferență de cota egală cu "2h", lungimea firului fiind 2L şi deschiderea 2l, atunci parametrul "a" al lănțişorului se determină din ecuația:

$$ash\frac{l}{a} = \sqrt{L^2 - h^2} \qquad (6.39)$$

Ecuațiile (6.38) şi (6.39) se pot rezolva numai prin metode numerice.

6.3.3. Fir omogen greu cu săgeată relativ mică şi tensiuni mari

În multe cazuri practice firele suspendate în doua puncte A şi B au sageți "$f = y_{A,B} - a$" mici şi tensiuni "S" foarte mari. În aceste cazuri, rezultatele obținute la punctul 6.3.2. se simplifică.

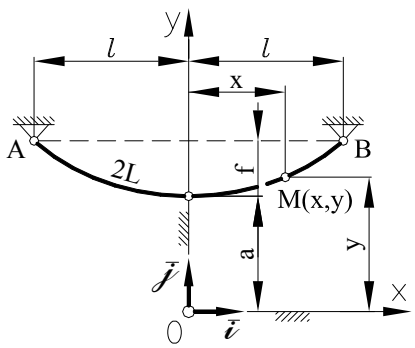


Fig. 6.10

Să presupunem ca puntele A si B de suspensie sunt situate la acelaşi nivel şi la distanța 2l măsurată pe orizontală. Fie "2L" lungimea toatală a firului şi "f" sageata maximă (fig. 6.10).

Ecuatiile (6.33) si (6.38), pentru x=l, y=f+a, L_x=L, devin:

$$a + f = a \cdot ch\frac{l}{a};\quad L = a \cdot sh\frac{l}{a} \qquad (6.40)$$

de unde, pentru "f" mic, respectiv "l" apropiat de "L", rezultă o valoare foarte mare a parametrului "a" al lanțișorului în raport cu "f" şi mare în raport cu "l". Ca urmare, pentru un "p" dat, tensiunea "H" este mare în raport cu "p". De asemenea, raportul $\frac{x}{a}$ are o valoare mică (subunitară) şi puterile sale superioare $\left(\frac{x}{a}\right)^4, \left(\frac{x}{a}\right)^5 \ldots$, pot fi neglijate. De aceea, din dezvltarea în serie Mac-Laurin a funcțiilor $\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ şi $\mathrm{sh}\frac{x}{a}$ se pot reține doar primii doi termini, ceilalți fiind neglijați:

$$\mathrm{ch}\frac{x}{a} = 1 + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^6}{6!} + \ldots; \quad \mathrm{sh}\frac{x}{a} = \frac{x}{a} + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^5}{5!} + \ldots \quad (6.41)$$

Păstrând doar primii doi termeni din prima dezvoltare (6.41) şi înlocuind în (6.33) obținem ecuația unei parabole:

$$y = a + \frac{x^2}{2a} \quad (6.42)$$

Relația între săgeata "f" a parabolei şi parametrul "a" al curbei funiculare rezultă din (6.42) înlocuind x = l şi y = a + f:

$$a = \frac{l^2}{2f} \text{ sau } f = \frac{l^2}{2a} \quad (6.43)$$

de unde, ținând seama de (6.35), se obține tensiunea în punctul cel mai de jos al firului:

$$H = p \cdot a = \frac{pl^2}{2f} \quad (6.44)$$

Într-un punct oarecare M de pe fir, de abscisă x, tensiunea va avea valoarea:

$$S = H\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = pa\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{pl^2}{2f}\sqrt{1 + \frac{4f^2x^2}{l^4}} \quad (6.45)$$

sau

$$S = py \cong p\left(\frac{l^2}{2f} + \frac{f}{l^2}x^2\right) \cong H,$$

iar lungimea firului măsurată din punctual de minim pâna la punctual M, ţinând seama de dezvoltarea a doua (6.41), va fi:

$$L_x = a \cdot \mathrm{sh}\frac{x}{a} \cong x\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^4}x^2\right)$$

Dacă, de exemplu, l=15 m, L=15,1 m atunci f=1,50 m.

6.3.4. Frecarea firelor

În figura 6.11a se consideră un fir prefect flexibil şi inextensibil înfăşurat pe periferia unui disc (tambur cilindric) fix de raza R pe o porţiune corespunzătoare unui unghi la centru "α" numit *unghi de infasurare*. Cunoaştem coeficientul de frecare la alunecare "μ" dintre fir si disc, acelaşi în toate punctele de contact. La cele doua extremităţi libere ale firului se aplică forţele $\bar{P}$ şi $\bar{Q}$ reprezentând tensiunile la cele doua capete ale firului.

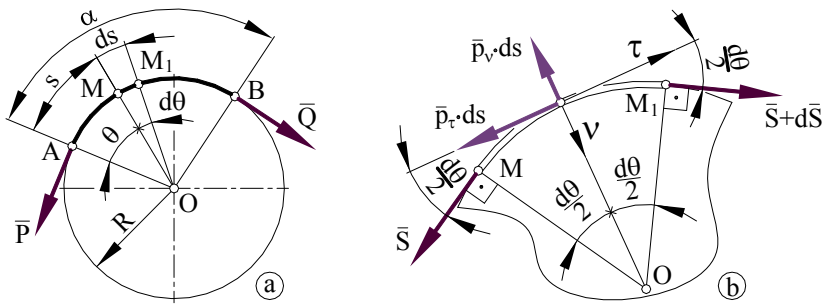


Fig. 6.11

Se cere determinarea limitelor raportului Q/P pentru ca firul sa rămână în echilibru.

Pentru început, menţinem forţa P constantă şi mărim forţa Q până când firul are tendinţa să alunece în sens orar.

Izolăm din fir o porţiune elementară de lungime "ds" corespunzatoare unui unghi la centru "dθ", cuprinsă între punctele infinit vecine M (definit de unghiul θ) şi M_1 (definit de unghiul "θ+dθ"). Forţele care menţin în echilibru elementul de fir sunt prezentate în figura 6.11b.

Ecuațiile scalare de echilibru ale forțelor în sistemul de coordonate intriseci sunt:

$$(S+dS)\cos\frac{d\theta}{2}-S\cos\frac{d\theta}{2}-p_\tau ds=0 \tag{6.46}$$

$$(S+dS)\sin\frac{d\theta}{2}-S\sin\frac{d\theta}{2}-p_\nu ds=0 \tag{6.47}$$

Componenta p_ν reprezintă reacțiunea normală a discului pe unitatea de lungime a firului (dN). Componenta $p_\tau = \mu p_\nu$ reprezintă forța de frecare (dT) care ia naştere între fir şi disc pe o porțiune de lungime egală cu unitatea.

Ținând seama că pentru unghiuri foarte mici putem face aproximațiile:

$$\cos\frac{d\theta}{2}=1,\ \sin\frac{d\theta}{2}=\frac{d\theta}{2}$$

şi neglijând infiniții mici de ordinul doi ($dS\frac{d\theta}{2}=0$), ecuațiile de echilibru devin:

$$dS-p_\tau ds=0 \tag{6.48}$$

$$Sd\theta-p_\nu ds=0 \tag{6.49}$$

La limita echilibrului, înlocuind în (6.48) $p_\tau = \mu p_\nu$ ($dT=\mu\cdot dN$)şi eliminând între ecuațiile (6.48) şi (6.49) reacțiunea normală $p_\nu ds$, se obține ecuatia diferențială:

$$\frac{dS}{S}=\mu d\theta, \tag{6.50}$$

care prin integrare între limitele cunoscute: $\int_P^{Q_{max}}\frac{dS}{S}=\mu\int_0^\alpha d\theta$

conduce la relația:

$$Q_{max}=Pe^{\mu\alpha}.$$

Aşadar pentru realizarea echilibrului trebuie ca $Q\le Q_{max}$, adică:

$$Q\le Pe^{\mu\alpha}\ \text{ sau }\ \frac{Q}{P}\le e^{\mu\alpha} \tag{6.51}$$

Inversând rolurile tensiunilor, considerând Q=constant şi mărind progresiv forţa P, tendinţa de mişcare a firului se schimbă. Reluând calculele se ajunge la condiţia de echilibru:

$$P \le Qe^{\mu\alpha} \text{ sau } \frac{Q}{P} \ge e^{\mu\alpha} \tag{6.52}$$

Împreună cele doua relaţii (6.51) şi (6.52) determină domeniul de variatie al raportului Q/P pentru care se realizează echilibrul firului înfăşurat pe o suprafaţă cilindrică aspră.

$$e^{-\mu\alpha} \le \frac{Q}{P} \le e^{\mu\alpha} \tag{6.53}$$

Relaţiile (6.51)-(6.53) sunt utile în multe aplicaţii practice (frâne cu bandă, transmisii prin curele, cabestane, etc.) dar trebuie utilizate corect apreciind, în funcţie de natura problemei, care dintre forţele P şi Q are rol de forţă motoare şi care are rol de forţă rezistentă.

6.3.5. Echilibrul firului petrecut peste un scripete

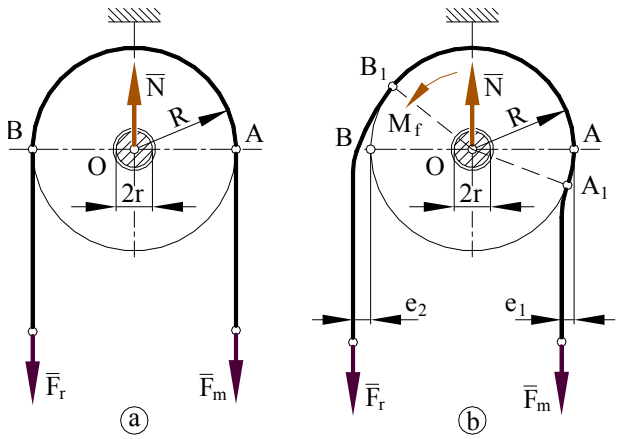


Fig. 6.12

Fie scripetele din figura 6.12a pe periferia căruia este petrecut un fir. La una din extremitatile libere ale firului se suspendă sarcina care trebuie ridicată $\overline{F}_r$ (forţa rezistentă), iar la cealaltă extremitate liberă se aplică forţa motoare $\overline{F}_m$. Se notează cu r- raxa axului (fusului), în jurul căruia se poate roti discul, cu R- raza discului şi cu μ_f - coeficientul complex al frecării dintre fus şi rola scripetelui.

Pentru calculul relaţiei dintre forţa motoare $\overline{F}_m$ şi forţa rezistentă $\overline{F}_r$ (sarcina de ridicat) trebuie avută în vedere pe lânga frecarea din axa sripetului şi o anumita rezistenţă la încovoiere a cablului, mai ales atunci cand diametrul cablului este mare iar materialele din care este împletit sunt mai puţin flexibile.

Aceasta rezistenţă este numită rigiditate funiculară şi se manifestă prin aceea că în porţiunile BB_1 şi AA_1, în care cablul se înfăşoară sau se desfăşoară

pe scripete, curbura lui variază continuu, de la valoarea l/R până la valoarea zero şi nu brusc (cum se consideră în cazul firelor perfect flexibile). Ca urmare, în partea unde se aplică forța motoare, firul se înfăşoară ceva mai mult pe rolă apropiindu-se de axul scripetelui cu o distanță e_1 , iar în partea unde acționează forța rezistentă firul se deplasează cu o distanță e_2.

Pe baza schemei mecanice (fig. 6.12b) se pot scrie următoarele ecuații de echilibru la limita:

$$F_m(R - e_1) - F_r(R + e_2) - \mu_f N r = 0 \tag{6.54}$$

$$N = F_r + F_m \tag{6.55}$$

din care rezultă:

$$F_m = F_r\left(1 + \frac{e_1 + e_2 + 2\mu_f r}{R - e_1 - \mu_f r}\right) \tag{6.56}$$

Deoarece termenii e_1 şi $\mu_f r$ de la numitorul relației (5.56) sunt foarte mici în raport cu R, pot fi neglijați şi se obține relația (aproximativă) mai simplă:

$$F_m = F_r\left(1 + \frac{e_1 + e_2}{R} + \frac{2\mu_f r}{R}\right) \tag{6.57}$$

în care, al doilea termen din paranteză reprezintă un factor de amplificare datorat influenței rigidității funiculare, iar al treilea termen din paranteză reprezintă influența frecării complexe din lagărul scripetelui.

Dacă se notează $\lambda = \frac{e_1 + e_2}{R}$ şi $k = 1 + \lambda + \frac{2\mu_f r}{R}$, relația (6.57) devine:

$$F_m = kF_r \tag{6.58}$$

unde k este un coeficient supraunitar care se determină pe cale experimentală. Relația (6.58) este utilă în aplicații la studiul echilibrului sistemelor de scripeți. În practică parametrul λ se ia proporțional cu pătratul diametrului cablului: $\lambda = k_1 \cdot d^2$ ($k_1 = 0.02 \ldots 0.06\ m^{-2}$ pentru funii de cânepă şi $k_1 = 0.03 \ldots 0.09\ m^{-2}$ pentru cabluri de oțel).

CINEMATICA

Cinematica este partea mecanicii care studiază mişcarea sistemelor materiale (punct material, sistem de puncte materiale, solid rigid, sisteme de corpuri rigide) fără a ţine seama de mase şi forţe.

Studiul mişcării implică alegerea unui sistem de referinţă. Mişcarea unui corp în raport cu un sistem de referinţă (reper, referenţial) fix se numeşte mişcare absolută iar în raport cu un reper mobil se numeşte mişcare relativă. Pentru mişcările curente din tehnică un reper legat de pământ se consideră fix.

În cinematică, trei probleme sunt esenţiale: problema traiectoriilor, problema vitezelor, problema acceleraţiilor.

7. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

7.1. Traiectoria mişcării unui punct

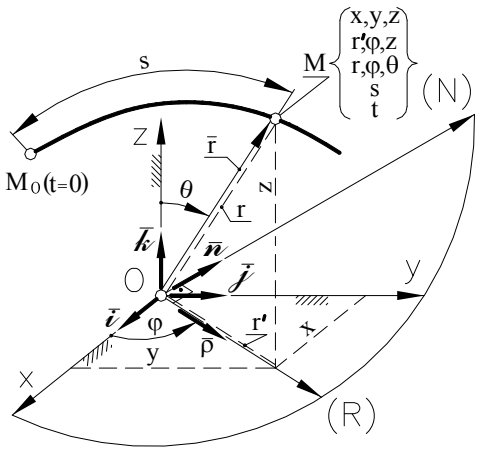


Fig. 7.1

Mişcarea unui punct este cunoscută dacă în orice moment *t* se poate determina poziţia punctului faţă de reperul ales. În general poziţia punctului se defineşte prin vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului faţă de originea *O* a sistemului de referinţă ales ca funcţie de timp (fig. 7.1):

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{7.1}$$

Pentru a defini o mişcare fizică reală, funcţia vectorială (7.1) trebuie să fie continuă, uniformă şi cel puţin de două ori derivabilă.

În mişcare, punctul ocupă diferite poziţii în spaţiu. Locul geometric al poziţiilor succesive ale punctului material în mişcare se numeşte traiectorie. Ecuaţia (7.1) reprezintă prin urmare ecuaţia vectorială a traiectroriei.

Vectorul de poziţie $\bar{r}$ poate fi definit în general cu ajutorul a trei funcţii scalare numite coordonatele punctului: (x, y, z); (r', φ, z); (r, φ, θ).

Se pot scrie relaţiile:

$$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k} \tag{7.2}$$

$$\bar{r} = (r'\cos\varphi)\,\bar{i} + (r'\sin\varphi)\,\bar{j} + z\,\bar{k} \tag{7.3}$$

$$\bar{r} = (r\sin\theta\cos\varphi)\,\bar{i} + (r\sin\theta\sin\varphi)\,\bar{j} + (r\cos\theta)\,\bar{k} \tag{7.4}$$

În coordonate carteziene funcţiile scalare sunt: abscisa *x*, ordonata *y* şi cota *z*:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{7.5}$$

şi sunt numite ecuaţiile carteziene ale mişcării sau ecuaţiile parametrice traiectoriei.

În coordonate cilindrice cele trei funcţii scalare sunt: raza polară r', unghiul polar φ şi cota *z*:

$$r' = r'(t);\ \varphi = \varphi(t);\ z = z(t) \tag{7.6}$$

şi sunt numite ecuaţiile mişcării în coordonate cilindrice sau ecuaţiile parametrice ale traiectoriei în coordonate cilindrice.

Dacă $z = 0$ coordonatele cilindrice se numesc coordonate polare.

În coordonate sferice cele trei funcţii scalare sunt: distanţa sau raza polară *r*, longitudinea φ şi azimutul θ:

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t),\ z = z(t), \tag{7.7}$$

numite ecuaţiile mişcării în coordonate sferice sau ecuaţiile parametrice ale traiectoriei în coordonate sferice.

Ecuaţiile mişcării se mai numesc şi legile de mişcare ale punctului.

Dacă este cunoscută ecuaţia intrinsecă a traiectoriei,

$$\bar{r} = \bar{r}(s), \tag{7.8}$$

s fiind lungimea arcului de curbă măsurată dintr-un punct iniţial M_0 (corespunzător momentului $t_0=0$) până la punctul *M* (corespunzător momentului *t)*, atunci mişcarea punctului pe curba *(Γ)* se poate defini prin funcţia scalară

$$s = s(t) \tag{7.9}$$

numită ecuația orară a mișcării.

Eliminând, de exemplu, parametrul t între ecuatiile (7.5) se obțin ecuațiile carteziene ale traiectoriei *(Γ)* a punctului *M*.

$$f_1(x,y,z)=0;\ f_2(x,y,z)=0 \tag{7.10}$$

7.2. Viteza punctului material

În figura 7.2 se consideră un punct material *M* aflat în mişcare pe traiectoria *(Γ)*. La momentul t poziția punctului în raport cu reperul fix *Oxyz* este dată de vectorul de poziție $\bar{r}$, iar la momentul $t+\Delta t$, Δt fiind un interval finit de timp, prin vectorul de poziție $\bar{r}+\Delta\bar{r}$.

Se numeşte viteză medie a punctului *M* în intervalul de timp Δt raportul dintre variația $\Delta\bar{r}$ a vectorului de poziție al punctului (numită şi deplasarea punctului) şi intervalul de timp Δt.

$$\bar{v}_m=\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \tag{7.11}$$

Limita către care tinde viteza medie când intervalul de timp tinde către zero se numeşte viteză instantanee a punctului corespunzătoare momentului *t*.

$$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\dot{\bar{r}} \tag{7.12}$$

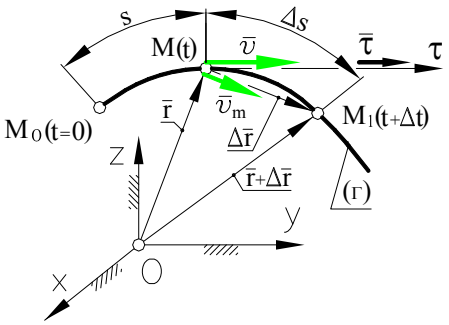


Fig. 7.2

Aşadar viteza instantanee sau viteza unui punct *M* aflat în mişcare este egală cu derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție.

Notăm cu $\bar{u}$ versorul deplasării vectoriale $\Delta\bar{r}$ şi cu $\bar{\tau}$ versorul tangentei la curbă în punctul *M*. Fie Δs lungimea arcului de curbă corespunzătoare intervalului Δt. Relația (7.12) poate fi scrisă:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \cdot \frac{|\Delta \bar{r}|}{|\Delta \bar{r}|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \bar{u} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau} = \dot{s}\bar{\tau} \quad (7.13)$$

S-a ținut seama că pentru Δt foarte mic coarda $|\Delta \bar{r}|$ se poate înlocui cu lungimea arcului de curbă Δs. Rezultă că

$$\bar{v} = v\bar{\tau}; \quad v = \dot{s} \quad (7.14)$$

Observații: i) Viteza $\bar{v}$ este un vector dirijat după tangenta la curbă în punctul considerat, având sensul în sensul mişcării; ii) Scalarul vectorului viteză este egal cu derivata arcului de curba parcurs de punct *s* în raport cu timpul; iii) În sistemul internațional de unități (SI), viteza se măsoară în *metri pe secundă* (m/s).

7.3. Accelerația punctului material

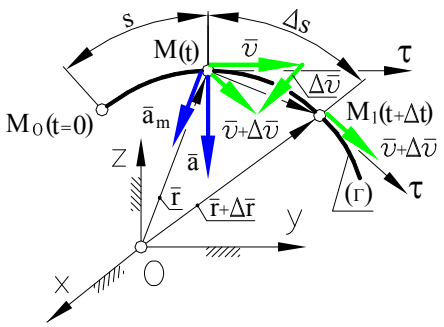


Fig. 7.3

În figura 7.3 este reprezentat un punct *M* în mişcare pe traiectoria *(Γ)*. La momentul *t* punctul are viteza $\bar{v}$, iar la momentul $t + \Delta t$ va avea viteza $\bar{v} + \Delta \bar{v}$. În intervalul de timp Δt variația vitezei este $\Delta \bar{v}$. Raportul dintre creşterea vitezei $\Delta \bar{v}$ şi creşterea corespunzatoare a timpului Δt se numeşte accelerație medie.

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \quad (7.15)$$

Limita către care tinde accelerația medie când intervalul de timp tinde către zero poartă numele de accelerație instantanee corespunzătoare momentului *t* sau accelerație corespunzătoare momentului *t*.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \tag{7.16}$$

Deci accelerația punctului la un moment dat este egală cu derivata vectorului viteză în raport cu timpul sau derivata de ordinul doi în raport cu timpul a vectorului de poziție.

În sistemul internațional de unități (SI), accelerația se măsoară în *metri pe secundă la pătrat* (m/s^2).

7.4. Componentele vitezei şi acceleraţiei în coordonate carteziene

Se presupun cunoscute ecuațiile carteziene ale mişcării punctului în mişcarea pe traiectoria (Γ):

$$x = x(t);\quad y = y(t);\quad z = z(t) \tag{7.17}$$

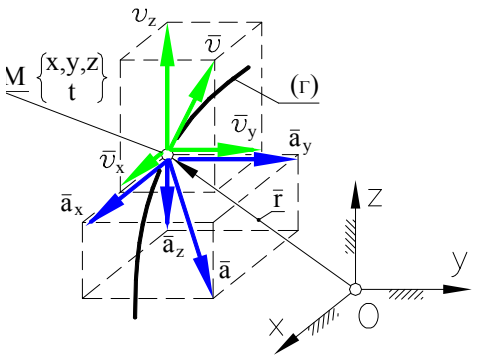


Fig. 7.4

Se cere determinarea proiecțiilor vitezei $\bar{v}\,(v_x, v_y v_z)$ şi acceleraţiei $\bar{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ pe axele reperului cartezian *Oxyz* (fig.7.4).

Conform relației (7.12)

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} \tag{7.18}$$

iar relației (7.2)

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{7.19}$$

Derivăm expresia (7.19) în raport cu timpul

$$\dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} \tag{7.20}$$

Întrucât versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$ sunt constanți, derivatele lor în raport cu timpul sunt nule.

$$\dot{\bar{i}} = 0,\ \dot{\bar{j}} = 0,\ \dot{\bar{k}} = 0 \tag{7.21}$$

Rezultă,

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \tag{7.22}$$

Pe de altă parte,

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} \tag{7.23}$$

Comparând relațiile (7.22) şi (7.23) obținem proiecțiile sau componentele scalare ale vectorului viteză.

$$v_x = \dot{x};\ v_y = \dot{y};\ v_z = \dot{z} \tag{7.24}$$

Modulul vitezei are expresia:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{7.25}$$

Orientarea vectorului viteză prin intermediul cosinusurilor directoare este dată de relațiile:

$$\cos(\bar{v}, Ox) = \frac{v_x}{v};\ \cos(\bar{v}, Oy) = \frac{v_y}{v};\ \cos(\bar{v}, Oz) = \frac{v_z}{v} \tag{7.26}$$

Derivând în raport cu timpul relația (7.22) şi ținând seama de (7.21) obținem expresia analitică a acceleraţiei.

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} \tag{7.27}$$

Comparând expresia (7.27) cu

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \tag{7.28}$$

rezultă proiecțiile sau componentele scalare ale vectorului acceleraţie pe axele reperului cartezian Oxyz.

$$a_x = \ddot{x};\ a_y = \ddot{y};\ a_Z = \ddot{z} \tag{7.29}$$

Modulul şi orientarea vectorului acceleraţie se obțin cu ajutorul relațiilor

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},\ \tag{7.30}$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a};\ \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a};\ \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a} \tag{7.31}$$

7.5. Componentele vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului lui Frenet

Se cunoaşte ecuaţia orară a mişcării punctului:

$$s = s(t) \tag{7.32}$$

Se cere determinarea proiecţiilor vectorilor viteză şi acceleraţie pe axele sistemului intrinsec de coordonate numit triedrul lui Frenet (fig.7.5).

Triedrul lui Frenet este un sistem de referinţă mobil având originea în punctul M şi axele dirijate astfel: - prima axă $M\tau$, dirijată după tangenta la traiectorie dusă în punctul M, cu sensul în sensul creşterii arcului de curbă (în sensul mişcării); - a doua axă $M\nu$, dirijată după normala principală cu sensul spre centrul de curbură K; - a treia axă $M\beta$, numită binormală, perpendiculară pe planul osculator $M\tau\nu$, cu sensul astfel ca triedrul $M\tau\nu\beta$ să fie drept.

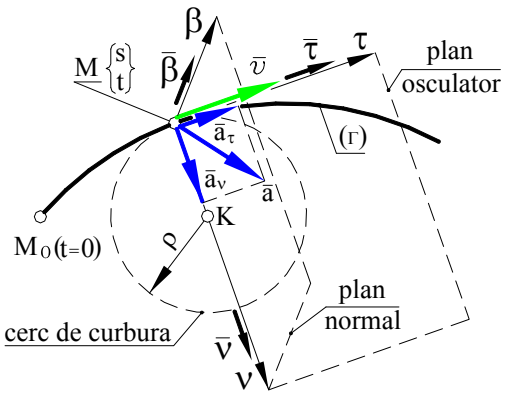


Fig. 7.5

Având în vedere relaţia (7.14)

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau} = v\bar{\tau} \tag{7.33}$$

proiecţiile vitezei pe axele intrinseci sunt:

$$v_\tau = v = \dot{s}\,;\; v_\tau = 0\,;\; v_\beta = 0 \tag{7.34}$$

Derivăm în raport cu timpul relaţia (7.33)

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\dot{\bar{\tau}} = \dot{v}\bar{\tau} + v\dot{\bar{\tau}} \tag{7.35}$$

Se reamintesc două relații din geometria diferențială:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} \tag{7.36}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{\nu}, \tag{7.37}$$

unde ρ este raza de curbură.

Pentru a calcula $\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{dt}$ punem relația (7.37) sub forma:

$$d\bar{\tau} = \frac{1}{\rho}\bar{\nu}ds \tag{7.38}$$

şi o împărțim cu *dt*. Rezultă:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{1}{\rho}\bar{\nu}\frac{ds}{dt} \qquad \text{sau} \qquad \dot{\bar{\tau}} = \frac{1}{\rho}\bar{\nu}\cdot\dot{s} = \frac{1}{\rho}\bar{\nu}\cdot v \tag{7.39}$$

Înlocuim (7.39) în (7.35)

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\nu = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{\nu} \tag{7.40}$$

Comparând (7.40) cu expresia analitică a acceleraţiei prin proiecţiile pe axele triedrului lui Frenet,

$$\bar{a} = a_\tau\bar{\tau} + a_\nu\bar{\nu} + a_\beta\bar{\beta} \tag{7.41}$$

obținem:

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v};\ a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho};\ a_\beta = 0 \tag{7.42}$$

Modulul acceleraţiei este:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2}, \tag{7.43}$$

iar cosinusurile directoare:

$$\cos(\bar{a},\bar{\tau}) = \frac{a_\tau}{a};\ \cos(\bar{a},\bar{\nu}) = \frac{a_\nu}{a};\ \cos(\bar{a},\bar{\beta}) = 0 \tag{7.44}$$

Observaţii:

1) Deoarece $a_\beta = 0$, vectorul acceleraţie este situat în planul osculator al curbei corespunzător punctului *M*.

2) Componenta $\bar{a}_\tau = a_\tau \bar{\tau}$ se numeşte componenta intrinsecă tangențială şi se datoreşte variației scalarului vitezei. Dacă $v = \text{constant}$, atunci $a_\tau = 0$ şi mişcarea punctului se numeşte mişcare uniformă. Accelerația tangențială poate să fie pozitivă sau negativă după cum are acelaşi sens sau sens contrar vitezei, mişcarea numindu-se după caz accelerată, respectiv încetinită.

3) Componenta $\bar{a}_v = a_v \bar{v}$ se numeşte componentă intrinsecă normală şi se datoreşte variației direcției vitezei. Accelerația $\bar{a}_v$ are întotdeauna sensul versorului $\bar{v}$, deoarece mărimea $a_v = \dfrac{v^2}{\rho}$ este strict pozitivă. Din această cauză vectorul $\bar{a}$ este dirijat în permanență înspre concavitatea traiectoriei.

4) Accelerația $\bar{a}_v = 0$ în două situații:

a) traiectoria punctului este rectilinie $(\rho = \infty)$;

b) punctul *M* se coincide cu un punct de inflexiune al curbei $(\rho = \infty)$.

5) Sigura mişcare în care amândouă componentele sunt nule ($a_\tau = 0, a_v = 0$) este mişcarea rectilinie şi uniformă.

7.6. Componentele vitezei şi acceleraţiei în coordonate cilindrice şi polare

În sistemul de coordonate cilindrice cele trei funcții scalare care definesc traiectoria punctului material în mişcare sunt:

$$r' = r'(t);\ \varphi = \varphi(t);\ z = z(t) \tag{7.45}$$

Considerând date ecuațiile mişcării (7.45) se cere determinarea proiecțiilor vectorilor viteză şi acceleraţie pe axele sistemului de coordonate cilindrice (fig. 7.6), sistem mobil având originea în punctul fix *O* sau punctul *M* şi axele: radială (*OR* sau *MR*), normală (*ON* sau *MN*) şi cotelor (*Oz* sau *Mz*). Dacă mişcarea punctului este o mişcare plană, considerând cota *z=0*, sistemul de coordonate cilindrice se numeşte sistem de coordonate polare (fig. 7.7).

Fie în figura 7.6 un punct material *M* în mişcare pe traiectoria *(Γ)* ale carei ecuații parametrice în coordonate cilindrice sunt date de (7.45). Se urmăreşte determinarea proiecțiilor vitezei şi acceleraţiei pe axele sistemului de referință mobil *MRNz* sau *ORNz* având versorii $\bar{\rho}$, $\bar{n}$ şi $\bar{k}$.

Vectorul de poziție al punctului *M* poate fi scris analitic:

$$\bar{r} = r'\bar{\rho} + z\bar{k} \tag{7.46}$$

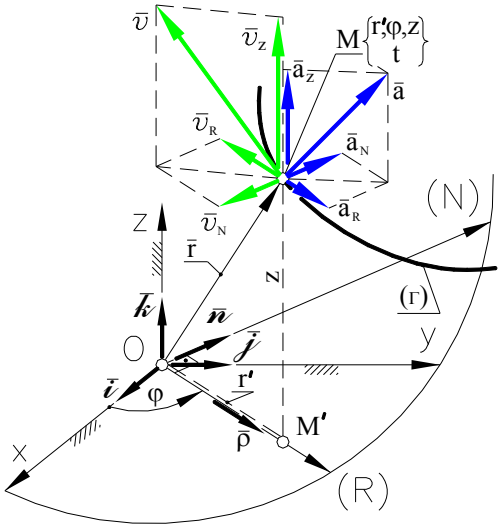


Fig. 7.6

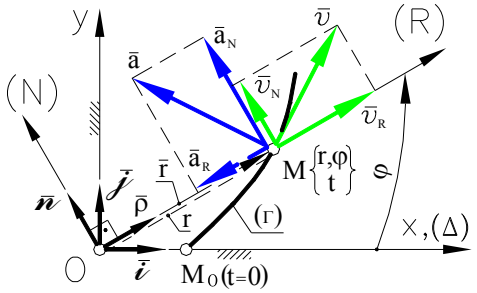


Fig. 7.7

Se derivează relația (7.46) în raport cu timpul

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}'\bar{\rho} + r'\dot{\bar{\rho}} + \dot{z}k + z\dot{\bar{k}} \tag{7.47}$$

şi se ține seama că $\dot{\bar{r}} = \bar{v}$ şi $\dot{\bar{k}} = 0$, fiind constant. Prin urmare relația (7.47) devine:

$$\bar{v} = \dot{r}'\bar{\rho} + r'\dot{\bar{\rho}} + \dot{z}\bar{k} \tag{7.48}$$

Între versorii $\bar{\rho}$, $\bar{n}$ şi $\bar{i}$, $\bar{j}$ subzistă relaţiile:

$$\bar{\rho} = \bar{i}\cos\varphi + \bar{j}\sin\varphi \tag{1.49}$$

$$\bar{n} = -\bar{i}\sin\varphi + \bar{j}\cos\varphi \tag{1.50}$$

Derivatele acestor versori în raport cu timpul vor fi:

$$\dot{\bar{\rho}} = -\bar{i}\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi + \bar{j}\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi = \dot{\varphi}\cdot\bar{n} \tag{7.51}$$

$$\dot{\bar{n}} = -\bar{i}\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi - \bar{j}\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi = -\dot{\varphi}\cdot\bar{\rho} \tag{7.52}$$

S-a ţinut seama că $\dot{\bar{i}}$ şi $\dot{\bar{j}}$ sunt nuli întrucât versorii $\bar{i}$ şi $\bar{j}$ sunt constanţi.

Înlocuind (7.51) în (7.48) expresia vitezei devine:

$$\bar{v} = \dot{r}'\bar{\rho} + r'\dot{\varphi}\cdot\bar{n} + \dot{z}\bar{k} \tag{7.53}$$

Vectorul viteză poate fi exprimat analitic prin proiecţiile sale pe axele sistemului de coordonate cilindrice sub forma:

$$\bar{v} = v_R\bar{\rho} + v_N\bar{n} + v_Z\bar{k} \tag{7.54}$$

Din compararea relaţiilor (7.54) şi (7.53) se obţin proiecţiile vitezei în coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} v_R = \dot{r}' \\ v_N = r'\dot{\varphi} \\ v_Z = \dot{z} \end{cases} \tag{7.55}$$

Modulul vitezei este egal cu:

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_N^2 + v_z^2} \tag{7.56}$$

Orientarea vectorului viteză se determină prin cosinusurile directoare:

$$\cos(\bar{v},\bar{\rho}) = \frac{v_R}{v};\ \cos(\bar{v},\bar{n}) = \frac{v_N}{v};\ \cos(\bar{v},\bar{k}) = \frac{v_z}{v} \tag{7.57}$$

Pentru a obţine proiecţiile acceleraţiei pe axele reperului mobil *MRNz* se derivează în funcţie de variabila timp expresia (7.53).

$$\dot{\bar{v}} = \ddot{r}' \cdot \bar{\rho} + \dot{r}' \cdot \dot{\bar{\rho}} + \dot{r}' \cdot \dot{\varphi} \cdot \bar{n} + r' \cdot \ddot{\varphi} \cdot \bar{n} + r' \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\bar{n}} + \ddot{z} \cdot \bar{k} + \dot{z} \cdot \dot{\bar{k}} \qquad (7.58)$$

Deoarece:

$$\dot{\bar{v}} = \bar{a}\,; \quad \dot{\bar{\rho}} = \dot{\varphi} \cdot \bar{n}\,; \quad \dot{\bar{n}} = -\dot{\varphi} \cdot \bar{\rho}\,; \quad \dot{\bar{k}} = 0$$

relația (7.58) devine:

$$\bar{a} = \left(\ddot{r}' - r'\dot{\varphi}^2\right)\bar{\rho} + \left(r'\ddot{\varphi} + 2\dot{r}'\dot{\varphi}\right)\bar{n} + \ddot{z}\,\bar{k} \qquad (7.59)$$

Comparând (7.59) cu

$$\bar{a} = a_R\,\bar{\rho} + a_N\,\bar{n} + a_Z\,\bar{k} \qquad (7.60)$$

obținem proiecțiile accelerației în coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} a_R = \ddot{r}' - r'\dot{\varphi}^2 \\ a_N = r'\ddot{\varphi} + 2\dot{r}'\dot{\varphi} \\ a_Z = \ddot{z} \end{cases} \qquad (7.61)$$

Modulul şi orientarea vectorului acceleraţie sunt date de relaţiile:

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_N^2 + a_Z^2} \qquad (7.62)$$

$$\cos\left(\bar{a}, \bar{\rho}\right) = \frac{a_R}{a}\,; \quad \cos\left(\bar{a}, \bar{n}\right) = \frac{a_N}{a}\,; \quad \cos\left(\bar{a}, \bar{k}\right) = \frac{a_Z}{a} \qquad (7.63)$$

Dacă mişcarea punctului are loc într-un plan $\left(z = 0\,;\ r' = r\right)$ sistemul de coordonate cilindrice devine sistem de coordonate polare (fig. 7.7).

Ecuaţiile mişcării sunt în acest caz:

$$r = r(t);\ \varphi = \varphi(t) \qquad (7.64)$$

Eliminând parametrul timp din ecuaţiile (1.64) se obţine ecuaţia traiectoriei în coordonate polare $r = r(\varphi)$.

Proiecţiile vitezei şi acceleraţiei sunt în acest caz:

$$\begin{cases} v_R = \dot{r} \\ v_N = r\dot{\varphi} \end{cases} \qquad (7.65)$$

$$\begin{cases} a_R = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ a_N = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{cases} \tag{7.66}$$

iar modulele lor

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_N^2};\ a = \sqrt{a_R^2 + a_N^2} \tag{7.67}$$

7.7. Mişcarea circulară a punctului material

În figura 7.8 se consideră un punct material *M* care se mişcă pe o traiectorie plană circulară având centrul în *O* şi raza *R*. Se alege un sistem de axe carteziene *Oxy* şi se notează cu φ unghiul dintre raza iniţială OM_o (axa *Ox*) şi raza *OM* corespunzătoare poziţiei punctului la momentul *t*.

Ecuaţiile parametrice carteziene ale traiectoriei punctului sunt în acest caz:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \tag{7.68}$$

Ecuaţia orară a mişcării este de forma:

$$s = R\varphi \tag{7.69}$$

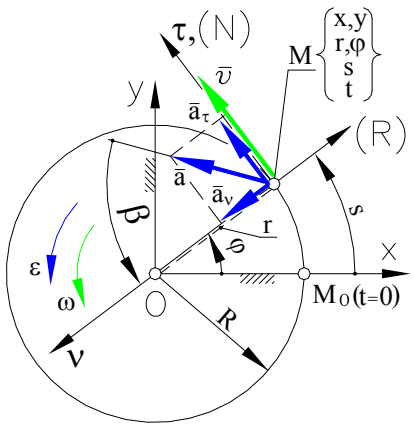


Fig. 7.8

În coordonate polare ecuaţiile mişcării sunt:

$$\begin{cases} r = R = \text{const.} \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \tag{7.70}$$

Se observă că mişcarea punctului este cunoscută dacă se cunoaşte funcția scalara $\varphi = \varphi(t)$ numită şi legea sau ecuația mişcării circulare.

Fiind dată ecuația mişcării $\varphi = \varphi(t)$ şi raza cercului se cere determinarea vitezei şi acceleraţiei punctului.

Expresiile proiecţiilor vitezei şi acceleratiei pe axele reperului cartezian se obţin prin derivarea succesivă în raport cu timpul a ecuaţiilor (7.68)

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -(R\sin\varphi)\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\cdot y = -\omega y \\ v_y = \dot{y} = (R\cos\varphi)\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\cdot x = \omega x \end{cases} \tag{7.71}$$

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -\ddot{\varphi}\cdot y - \dot{\varphi}\cdot y = -\ddot{\varphi}\cdot y - \dot{\varphi}^2\cdot x = -\varepsilon y - \omega^2 x \\ a_y = \ddot{y} = \ddot{\varphi}\cdot x + \dot{\varphi}\cdot\dot{x} = \ddot{\varphi}\cdot x - \dot{\varphi}^2\cdot y = \varepsilon x - \omega^2 y \end{cases} \tag{7.72}$$

Modulul vitezei este

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega R \tag{7.73}$$

iar al acceleraţiei

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(x^2 + y^2)} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{7.74}$$

S-au făcut notaţiile:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{7.75}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \tag{7.76}$$

Mărimea ω caracterizează variaţia unghiului la centru φ în unitatea de timp şi se numeşte viteza unghiulară. În SI se măsoară în *radiani pe secundă* (rad/sec) sau sec^{-1}.

Mărimea ε caracterizează variaţia vitezei unghiulare în unitatea de timp şi se numeşte acceleraţie unghiulară. În SI se măsoară în *radiani pe secundă la pătrat* (rad/sec^2) sau sec^{-2}.

Utilizând ecuația orară a mişcării se obțin, în sistemul de axe intrinseci (triedrul lui Frenet), relațiile:

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega \tag{7.77}$$

$$\begin{cases} a_\tau = \ddot{s} = \dot{v} = R\dot{\omega} = R\varepsilon \\ a_\nu = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2 \end{cases};\quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{7.78}$$

În sistemul de coordonate polare avem:

$$\begin{cases} v_R = \dot{r} = 0 \\ v_N = r\dot{\varphi} = R\omega \end{cases};\quad v = v_R = R\omega \tag{7.79}$$

$$\begin{cases} a_R = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 - r\omega^2 = -R\omega^2 \\ a_N = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = r\varepsilon + 0 = R\varepsilon \end{cases};\ a = \sqrt{a_R^2 + a_N^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{7.80}$$

Considerând doi vectori alunecători $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$ şi $\bar{\varepsilon} = \varepsilon\bar{k}$, unde $\omega = \dot{\varphi}$ şi $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, situați pe axa *Oz*, vectorii viteză şi accelerație pot fi exprimați prin relațiile vectoriale:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r};\quad \bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r} \tag{7.81}$$

Dacă viteza unghiulară $\omega = \omega_0 = \text{constant}$ mişcarea circulară se numeşte mişcare circulară uniformă. Ecuația mişcării circulare uniforme rezultă din integrarea ecuației diferențiale

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \tag{7.82}$$

având condiția inițială $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$. Rezultă $\varphi = \omega_0 t + C_1$. Impunând condiția inițială $\varphi_0 = \omega_0 \cdot 0 + C_1$ obținem $C_1 = \varphi_0$ şi ca urmare ecuația mişcării circulare uniforme este:

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \tag{1.83}$$

Dacă accelerația unghiulară $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{constant}$ mişcarea se numeşte mişcare circulară uniform variată. Pentru $\varepsilon_0 > 0$ mişcarea circulară este uniform accelerată iar pentru $\varepsilon_0 < 0$ mişcarea circulară este uniform incetinită.

Ecuația diferențială a mişcării este în acest caz:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon_0 \tag{7.84}$$

Prin integrare de două ori se obține:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} + C_2 t + C_3 \tag{7.85}$$

Cele două constante de integrare rezultă prin impunerea condițiilor inițiale ale mişcării la $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$.

În acest caz ecuația mişcării are forma:

$$\varphi = \varepsilon_0 \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 \tag{7.86}$$

În mişcarea circulară unghiul pe care vectorul accelerație îl face cu raza *MO* nu depinde de raza cercului ci numai de accelerația unghiulară şi de viteza unghiulară:

$$\text{tg}\beta = \frac{|a_\tau|}{a_\nu} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{7.87}$$

Dacă $\varepsilon = 0$ $(\omega = \text{constant})$, $\text{tg}\beta = 0$, atunci $\beta = 0$ şi vectorul accelerație are sens centripet.

7.8. Viteză areolară. Accelerație areolară

În figura 7.9 se consideră un punct material M aflat în mişcare pe o traiectorie oarecare (Γ). La momentul t punctul are viteza $\bar{v}$, accelerația $\bar{a}$ şi vectorul de poziție (raza vectoare) $\bar{r}$ față de un punct fix O.

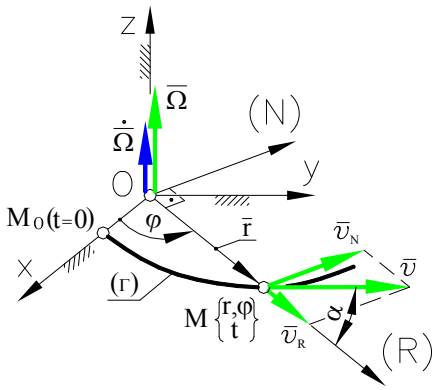


Fig. 7.9

Într-un interval de timp suficient de mic Δt raza vectoare $\bar{r} = \overline{OM}$ mătură o arie care poate fi aproximată cu aria triunghiului OMM_1, care la rândul ei poate fi calculată cu relația:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot |\bar{r}| \cdot |\Delta \bar{r}| \cdot \sin(\bar{r}, \Delta \bar{r}) \tag{7.88}$$

Acestei arii i se poate da un sens vectorial. Se observă că aria ΔA este chiar modulul vectorului $\Delta \overline{A}$:

$$\Delta \overline{A} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \Delta \bar{r} \tag{7.89}$$

Se numeşte viteză areolară medie raportul dintre vectorul $\Delta \overline{A}$ şi intervalul corespunzător de timp Δt:

$$\overline{\Omega}_m = \frac{\Delta \overline{A}}{\Delta t} \tag{7.90}$$

Aşadar viteza areolară este o măsură a rapidității cu care raza vectoare OM mătură triunghiul curbiliniu OMM_1.

Viteza areolară instantanee se defineşte ca fiind limita căre care tinde viteza areolară medie când intervalul de timp Δt tinde către zero.

$$\overline{\Omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v} \tag{7.91}$$

Direcţia şi sensul vitezei areolare sunt date de proprietăţile produsului vectorial. Modulul vitezei areolare măsoară aria măturată de raza vectoare în unitatea de timp.

$$\left|\overline{\Omega}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{r}\right| \cdot \left|\overline{v}\right| \cdot \sin(\overline{r}, \overline{v}) \tag{7.92}$$

În SI unitatea de măsură pentru viteza areolară este metrul pătrat pe secundă (m^2/s).

În cazul unei traiectorii plane, viteza areolară este normală pe planul traiectoriei şi are modulul

$$\left|\overline{\Omega}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{r}\right| \cdot \left|\overline{v}\right| \cdot \sin(\overline{r}, \overline{v}) = \frac{1}{2}\left|\overline{r}\right| \cdot v_N = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}, \tag{7.93}$$

în care φ este unghiul polar.

Dacă mişcarea este circulară (viteza este pependiculară pe rază) putem stabili relaţia dintre viteza areolară şi viteza liniară, respectiv viteza unghiulară:

$$\left|\overline{\Omega}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{r}\right| \cdot \left|\overline{v}\right| = \frac{1}{2} r^2 \omega \tag{7.94}$$

Acceleraţia areolară instantanee se defineşte ca derivata în raport cu timpul a vitezei areolare şi caracterizează rata de variaţie a vitezei areolare instantanee.

$$\dot{\overline{\Omega}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{r} \times \overline{v}\right) = \frac{1}{2}\dot{\overline{r}} \times \overline{v} + \frac{1}{2}\overline{r} \times \dot{\overline{v}} = \frac{1}{2}\overline{v} \times \overline{v} + \frac{1}{2}\overline{r} \times \overline{a} = \frac{1}{2}\overline{r} \times \overline{a} \tag{7.95}$$

Unitatea de măsură pentru acceleratia areolară este metrul pătrat pe secundă la pătrat (m^2/s^2).

Dacă traiectoria este plană, acceleraţia areolară este normală pe planul traiectoriei şi are modulul:

$$\left|\dot{\overline{\Omega}}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{r}\right| \cdot \left|\overline{a}\right| \cdot \sin(\overline{r}, \overline{a}) = \frac{1}{2}\left|\overline{r}\right| \cdot a_n = \frac{r}{2}\left(r\ddot{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\right) \tag{7.96}$$

8. CINEMATICA RIGIDULUI

8.1. Generalităţi. Traiectoria unui punct aparţinând rigidului aflat în mişcare generală

Se consideră în figura 8.1 un solid rigid (C) care execută o mişcare spaţială oarecare. A cunoaşte mişcarea lui înseamnă a cunoaşte în orice moment poziţia, viteza şi acceleraţia oricărui punct al rigidului.

Pentru studiul mişcării generale a unui rigid se alege un sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$ şi unul mobil legat de corp $Oxyz$, având originea într-un punct aparţinând rigidului.

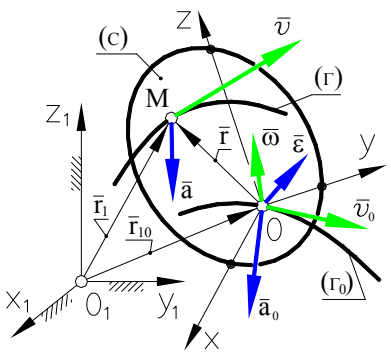


Fig. 8.1

Poziţia unui punct *M* aparţinând rigidului este definită prin vectorii de poziţie $\bar{r}_1$, respectiv $\bar{r}$, faţă de cele două sisteme de referinţă, sau prin coordonate carteziene x_1, y_1, z_1 şi x, y, z. Coordonatele x_1, y_1, z_1 sunt variabile în timpul mişcării rigidului pe când coordonatele x, y, z sunt constante, deoarece definesc punctul pentru care se cere să se determine mişcarea.

Notând cu $\bar{r}_{10}$ vectorul de poziţie al originii *O* faţă de O_1 se poate scrie relaţia vectorială:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10} + \bar{r} \tag{8.1}$$

Proiectând relația (8.1) pe axele reperului $O_1x_1y_1z_1$ ținând seama de tabloul cosinuşilor directori ai axelor sistemului $Oxyz$ față de axele sistemului $O_1x_1y_1z_1$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}_1$	α_1	α_2	α_3
$\bar{j}_1$	β_1	β_2	β_3
$\bar{k}_1$	γ_1	γ_2	γ_3

rezultă:

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + x\,\alpha_1 + y\,\alpha_2 + z\,\alpha_3 \\ y_1 = y_{10} + x\,\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3 \\ z_1 = z_{10} + x\,\gamma_1 + y\,\gamma_2 + z\,\gamma_3 \end{cases} \tag{8.2}$$

Poziția punctului *M* este cunoscută dacă sunt cunoscute poziția punctului *O* şi orientarea reperului $Oxyz$ față de $O_1x_1y_1z_1$ adică funcțiile scalare:

$$\begin{cases} x_{10} = x_{10}(t) \\ y_{10} = y_{10}(t) \\ z_{10} = z_{10}(t) \end{cases} \tag{8.3}$$

şi

$$\begin{cases} \alpha_i = \alpha_i(t) \\ \beta_i = \beta_i(t), \quad (i = 1,2,3) \\ \gamma_i = \gamma_i(t) \end{cases} \tag{8.4}$$

În locul cosinusurilor diretoare pot fi considerate unghiurile lui Euler:

$$\psi = \psi(t);\ \theta = \theta(t);\ \varphi = \varphi(t) \tag{8.5}$$

Ecuațiile (8.2) reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectorie (Γ) a unui punct oarecare *M*, aparținând rigidului.

Aceste ecuații pot fi scrise sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

sau utilizând aşa numitele coordonate omogene:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x_{10} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & y_{10} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

Matricea, $[R] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$, se numeşte *matrice de rotaţie* sau *matricea cosinusurilor directoare,* iar matricea, $[T] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x_{10} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & y_{10} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, poartă numele de *matrice de transformare* (*tranziţie, trasfer*).

8. 2. Distribuţia vitezelor. Formulele lui Poisson

Se numeşte *distribuţie a vitezelor* sau *câmp de viteze* totalitatea vectorilor viteză instantanee ai punctelor solidului rigid la un moment dat *t*.
Pentru a deduce legea distribuţiei vitezelor în cazul mişcării generale se deriveaza în raport cu timpul relaţia (8.1)

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_{10} + \dot{\bar{r}} \tag{8.8}$$

În (8.8) $\dot{\bar{r}}_1$ reprezintă viteza $\bar{v}$ a punctului *M*, $\dot{\bar{r}}_{10}$ este viteza $\bar{v}_0$ a originii sistemului de referinţă mobil, iar

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d}{dt}\left(x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}\right) = \dot{x}\,\bar{i} + \dot{y}\,\bar{j} + \dot{z}\,\bar{k} + x\,\dot{\bar{i}} + y\,\dot{\bar{j}} + z\,\dot{\bar{k}} \tag{8.9}$$

Deoarece *x, y* şi *z* sunt constante $\left(\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0,\ \dot{z} = 0\right)$

$$\dot{\bar{r}} = x\,\dot{\bar{i}} + y\,\dot{\bar{j}} + z\,\dot{\bar{k}} \tag{8.10}$$

Pentru a găsi semnificația vectorilor $\dot{\bar{i}}$, $\dot{\bar{j}}$, $\dot{\bar{k}}$ care apar în relația (8.10) vom determina proiecțiile lor pe axele triedrului mobil $Oxyz$.

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{i}} &= \left(\dot{\bar{i}}\cdot\bar{i}\right)\cdot\bar{i} + \left(\dot{\bar{i}}\cdot\bar{j}\right)\cdot\bar{j} + \left(\dot{\bar{i}}\cdot\bar{k}\right)\cdot\bar{k} \\
\dot{\bar{j}} &= \left(\dot{\bar{j}}\cdot\bar{i}\right)\cdot\bar{i} + \left(\dot{\bar{j}}\cdot\bar{j}\right)\cdot\bar{j} + \left(\dot{\bar{j}}\cdot\bar{k}\right)\cdot\bar{k} \\
\dot{\bar{k}} &= \left(\dot{\bar{k}}\cdot\bar{i}\right)\cdot\bar{i} + \left(\dot{\bar{k}}\cdot\bar{j}\right)\cdot\bar{j} + \left(\dot{\bar{k}}\cdot\bar{k}\right)\cdot\bar{k}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Între versorii $\bar{i}, \bar{j}$ şi $\bar{k}$ avem relațiile:

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = 1;\quad \bar{j}\cdot\bar{j} = 1;\quad \bar{k}\cdot\bar{k} = 1 \tag{8.12}$$

$$\bar{i}\cdot\bar{j} = 0;\quad \bar{j}\cdot\bar{k} = 0;\quad \bar{k}\cdot\bar{i} = 0 \tag{8.13}$$

Derivând în raport cu timpul relațiile (8.12) şi (8.13) obținem:

$$2\dot{\bar{i}}\cdot\bar{i} = 0;\quad 2\dot{\bar{j}}\cdot\bar{j} = 0;\quad 2\dot{\bar{k}}\cdot\bar{k} = 0 \tag{8.14}$$

$$\dot{\bar{i}}\cdot\bar{j} + \bar{i}\cdot\dot{\bar{j}} = 0;\quad \dot{\bar{j}}\cdot\bar{k} + \bar{j}\cdot\dot{\bar{k}} = 0;\quad \dot{\bar{k}}\cdot\bar{i} + \bar{k}\cdot\dot{\bar{i}} = 0 \tag{8.15}$$

Fie $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ trei mărimi scalare reprezentând proiecțiile unui vector $\bar{\omega} = \omega_X\bar{i} + \omega_Y\bar{j} + \omega_Z\bar{k}$, astfel încât

$$\dot{\bar{j}}\cdot\bar{k} = -\bar{j}\cdot\dot{\bar{k}} = \omega_X;\quad \dot{\bar{k}}\cdot\bar{i} = -\bar{k}\cdot\dot{\bar{i}} = \omega_Y;\quad \dot{\bar{i}}\cdot\bar{j} = -\bar{i}\cdot\dot{\bar{j}} = \omega_Z \tag{8.16}$$

Luând în considerare relațiile (8.14) şi (8.16), relațiile (8.11) pot fi scrise:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{i}} &= \qquad\quad \omega_Z\bar{j} - \omega_Y\bar{k} = \bar{\omega}\times\bar{i} \\
\dot{\bar{j}} &= -\omega_Z\bar{i} \qquad + \omega_X\bar{k} = \bar{\omega}\times\bar{j} \\
\dot{\bar{k}} &= \omega_Y\bar{i} - \omega_X\bar{j} \qquad\quad = \bar{\omega}\times\bar{k}
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Relațiile (8.17) sunt cunoscute sub numele de *formulele lui Poisson.*
Înlocuind formulele (8.17) în relația (8.10) se obține:

$$\dot{\bar{r}} = x\bar{\omega}\times\bar{i} + y\bar{\omega}\times\bar{j} + z\bar{\omega}\times\bar{k} = \bar{\omega}\times x\bar{i} + \bar{\omega}\times y\bar{j} + \bar{\omega}\times z\bar{k} = \bar{\omega}\times\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \bar{\omega}\times\bar{r} \tag{8.18}$$

Ţinând seama de semnificaţiile vectorilor $\dot{\bar{r}}_1$, $\dot{\bar{r}}_{10}$ şi de (8.18), relaţia (8.8) devine:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} \tag{8.19}$$

Această relaţie exprimă legea distribuţiei vitezelor în mişcarea generală şi este cunoscută sub numele de formula lui Euler pentru viteze.

Se observă că distribuţia vitezelor depinde de două funcţii vectoriale $\bar{v}_0 = \bar{v}_0(t)$ şi $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$. Se demonstrează în cazul mişcărilor particulare că vectorul $\bar{\omega}$ are semnificaţia unei viteze unghiulare. Din această cauză se numeşte vector viteză unghiulară instantane.

Scriem dezvoltat relaţia (8.19):

$$v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} + v_{0z}\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

de unde obţinem componentele scalare (proiecţiile) vitezei pe axele sistemului de referinţă mobil Oxyz:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_x x \end{aligned} \tag{8.20}$$

Relaţiile (2.20) mai pot fi scrise restrâs sub formă matriceală:

$$\{v\} = \{v_0\} + [\hat{\omega}]\cdot\{r\} \tag{8.21}$$

unde $\{v\}, \{v_0\}$ şi $\{r\}$ sunt matrice coloană (vectori), iar $[\hat{\omega}]$ este matricea antisimetrică asociată vectorului $\bar{\omega}$. Relaţia (8.21), scrisă dezvoltat, are forma:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{8.22}$$

Se observă că (8.22) este identică cu (8.20).

8.3. Distribuția accelerațiilor

Accelerația punctului M (fig. 8.1) se obține derivând în raport cu timpul vectorul viteză instantanee

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}\right) = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\dot{\bar{r}} \tag{8.23}$$

În (8.23) $\dot{\bar{v}}_0 = \bar{a}_0$ (accelerația punctului O), $\dot{\bar{r}} = \bar{\omega}\times\bar{r}$ (conform 8.18). Notând $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$, relația (8.23) devine:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right) \tag{8.24}$$

Formula (8.24) exprimă legea distribuției accelerațiilor în mişcarea generală a rigidului. Distribuția accelerațiilor este cunoscută dacă se dau trei funcții vectoriale :

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_0(t);\ \bar{\omega} = \bar{\omega}(t);\ \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t) \tag{8.25}$$

Vectorul $\bar{\varepsilon}$, reprezentând derivata în raport cu timpul a vitezei unghiulare instantanee, se numeşte acceleraţie unghiulară instantanee.

Se rescrie sub formă analitică relația (8.24)

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} =$$

$$= a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} + a_{0z}\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix}$$

şi se înmulțește scalar cu versorii axelor sistemului de referință mobil obținându-se componentele scalare (proiecțiile) acceleraţiei pe aceste axe:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{0x} + \varepsilon_y z - \varepsilon_z y - \left(\omega_y^2 + \omega_z^2\right)x + \omega_x\omega_y y + \omega_x\omega_z z \\ a_y &= a_{0y} + \varepsilon_z x - \varepsilon_x z - \left(\omega_z^2 + \omega_x^2\right)y + \omega_y\omega_z z + \omega_y\omega_x x \\ a_z &= a_{0z} + \varepsilon_x y - \varepsilon_y x - \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right)z + \omega_z\omega_x x + \omega_z\omega_y y \end{aligned} \tag{8.26}$$

Relațiile (8.26) pot fi puse sub formă matriceală:

$$\{a\} = \{a_0\} + [\hat{\varepsilon}]\cdot\{r\} + [\hat{\omega}]^2\cdot\{r\} \tag{8.27}$$

unde:

$$\{a\}=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix};\quad \{a_0\}=\begin{bmatrix} a_{0x} \\ a_{0y} \\ a_{0z} \end{bmatrix};$$

$$[\hat{\varepsilon}]=\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}$$ este matricea antisimetrică asociată vectorului

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon_x\bar{i}+\varepsilon_y\bar{j}+\varepsilon_z\bar{k};$$

$$[\hat{\omega}]=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$ este matricea antisimetrică asociată vectorului $\bar{\omega}$;

$$\{r\}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

8.4. Mişcări particulare ale rigidului

Dacă în timpul mişcării corpul poate ocupa orice poziție în spațiu fără nici o restricție de natură geometrică, mişcarea lui se numeşte mişcare generală. Când rigidul este obligat, într-un anumit interval de timp, să ocupe anumite poziții în spațiu, mişcarea lui se numeşte particulară.

Mişcarea corespunzătoare unui interval finit de timp Δt se numeşte mişcare finită. Punctele corpului descriu în acest interval de timp deplasări finite, Δs. Mişcarea corpului într-un interval de timp infinit mic dt se numeşte mişcare instantanee. Deplasările punctelor corpului corespunzătoare intervalului dt se numesc deplasări elementare, ds.

Cele mai întâlnite mişcări particulare ale rigidului sunt: mişcarea de translație, mişcarea de rotație în jurul unei axe fixe, mişcarea de roto-translație, mişcarea plan-paralelă, mişcarea sferică.

Ca şi în cazul punctului material, problemele esențiale în studiul cinematic al acestor mişcări sunt reprezentate de problema traiectoriilor (studiul geometric), problema vitezelor (distribuția vitezelor) şi problema acceleraților (distribuția acceleraților).

8. 4.1. Mişcarea de translaţie

Un solid rigid execută o mişcare de translaţie dacă o dreaptă oarecare solidară cu rigidul rămâne în timpul mişcării paralelă cu ea insăşi (fig. 8.2).

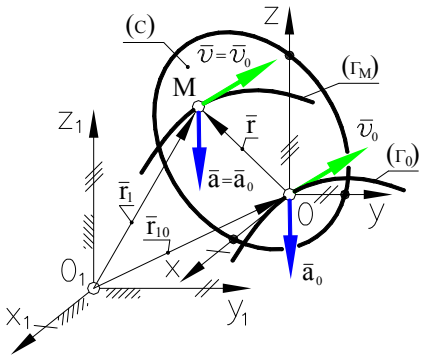


Fig. 8.2

Din definiţie rezultă că axele reperului mobil legat de corp rămân paralele cu ele însele, adică:

$$\bar{i} = \text{constant}, \quad \bar{j} = \text{constant}, \quad \bar{k} = \text{constant}. \tag{8.28}$$

şi prin urmare

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \text{constant}. \tag{8.29}$$

Ecuaţia vectorială a traiectoriei punctului M al rigidului aflat în mişcare de translaţie, conform notaţiilor din figura 8.2, este dată de relaţia:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10} + \bar{r} \tag{8.30}$$

Deoarece $\bar{r} = \text{constant}$, traiectoria punctului M este identică cu a punctului O putând fi obţinută printr-o simplă translaţie geometrică dată de vectorul $\bar{r}$. Deci, în mişcarea de translaţie traiectoriile tuturor punctelor aparţinând rigidului sunt curbe identice.

În funcţie de forma traiectoriilor descrise de punctele corpului translaţiile pot fi:

a) rectilinii (mişcarea ascensorului, mişcarea pistonului într-un cilindru);

b) circulare (mişcarea scaunelor roţii mari din parcurile de distracţii, mişcarea bielei de cuplare a două roţi cu axe fixe de aceeaşi rază);

c) curbilinii (biela de cuplare a roţilor unei locomotive).

Un rigid în mişcare de translaţie are *trei grade de libertate*, date de funcţiile scalare:

$$x_{10} = x_{10}(t), \quad y_{10} = y_{10}(t), \quad z_{10} = z_{10}(t). \tag{8.31}$$

Derivând în raport cu timpul relaţia (2.30), ţinând cont de (2.29) rezultă:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_{10} + \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_{10} = \bar{v}_0 ; \quad \bar{v} = \bar{v}_0 \tag{8.32}$$

Relaţia (8.32) exprimă legea distribuţiei vitezelor în mişcarea de translaţie, conform căreia la un moment dat *t* vitezele tuturor punctelor sunt egale.

Derivând (8.28) în raport cu timpul rezultă:

$$\dot{\bar{i}} = 0; \ \dot{\bar{j}} = 0 ; \ \dot{\bar{k}} = 0, \ \text{de unde} \ \omega_x = 0, \ \omega_y = 0, \ \omega_z = 0$$

şi de aici

$$\bar{\omega} = 0 \ \text{ şi } \ \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = 0 \tag{8.33}$$

Înlocuind (2.32) şi (2.33) în (2.24) obţinem

$$\bar{a} = \bar{a}_0 , \tag{8.34}$$

adică legea distribuţiei acceleraţiilor în mişcarea de translaţie, conform căreia la un moment dat acceleraţiile tuturor punctelor sunt egale.

8.4.2. Mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe

Un solid rigid are o *mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe* dacă în timpul mişcarii două puncte ale sale rămân fixe în spaţiu. Dreapta care uneşte cele doua puncte se numeşte axă de rotaţie. Toate punctele acestei axe rămân fixe în timpul mişcării corpului.

Pentru studiul mişcării se alege un triedru mobil $Oxyz$ solidar legat cu rigidul, având axa Oz în coincidenţă cu axa de rotaţie, şi un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$, astfel încât O_1 să coincidă cu O şi axa O_1z_1 să fie suprapusă în acelaşi sens peste Oz (fig. 8.3).

Dacă notăm cu φ unghiul pe care axa Ox îl face cu axa O_1x_1 rezultă următoarele particularitaţi ale mişcării:

$$x_{10} = y_{10} = z_{10} = 0 \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \cos\varphi; \quad &&\beta_1 = \sin\varphi; \quad &&\gamma_1 = 0 \\ &\alpha_2 = -\sin\varphi; \quad &&\beta_2 = \cos\varphi; \quad &&\gamma_2 = 0 \\ &\alpha_3 = 0; \quad &&\beta_3 = 0; \quad &&\gamma_3 = 1 \end{aligned} \tag{8.36}$$

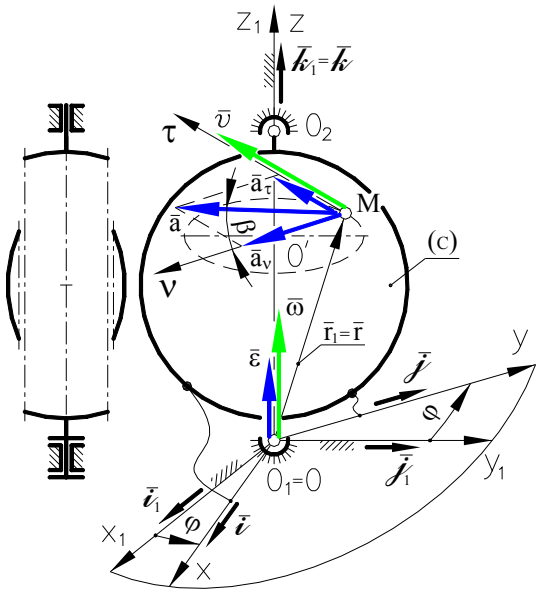


Fig. 2.3

În acest caz poziția rigidului este precizată printr-un singur parametru, unghiul de rotație φ. Ca urmare rigidul are un singur grad de libertate. Ecuația $\varphi = \varphi(t)$ reprezintă ecuația mişcării de rotație a rigidului.

Câmpul traiectoriilor

Înlocuind (8.35) şi (8.36) în (8.2) rezultă ecuațiile parametrice ale traiectoriei unui punct M al corpului aflat în mişcare de rotație, punct având coordonatele x,y,z în sistemul de referință legat de corp:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z_1 = z \end{cases} \tag{8.37}$$

Eliminând între primele două ecuații parametrul φ se obțin ecuațiile carteziene ale traiectoriei punctului M.

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= (x^2 + y^2)\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = R^2 \\ z_1 &= z \end{aligned} \tag{8.38}$$

Aceste ecuații arată că traiectoria punctului M este un cerc situat într-un plan normal pe axa de rotație la cota *z* a punctului, cu centrul pe axa de rotație şi având raza egală cu distanța de la punct la axă. Punctul M fiind ales arbitrar, concluziile se extind asupra tuturor punctelor rigidului.

Distribuția vitezelor

Deoarece punctul O este fix, viteza lui $\bar{v}_0 = 0$. Anulând $\bar{v}_0$ în relația (8.19) obținem legea distribuției vitezelor în mişcarea de rotație:

$$\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r} \tag{8.39}$$

Se observă din figura 8.3 că versorul axei *Oz* rămâne constant în direcție, $\bar{k} = \bar{k}_1 = \text{constant}$. Deci $\dot{\bar{k}} = 0$. Pe de altă parte $\dot{\bar{k}} = \bar{\omega}\,x\,\bar{k}$. Rezultă:

$$\bar{\omega}\times\bar{k} = 0 \tag{8.40}$$

Notăm cu ω scalarul vectorului $\bar{\omega}$. Din (8.40) deducem

$$\bar{\omega} = \omega\,\bar{k}, \tag{8.41}$$

adică suportul vectorului $\bar{\omega}$ este chiar axa de rotație. Derivând (8.41) în raport cu timpul se obține accelerația unghiulară

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}\cdot\bar{k} = \varepsilon\cdot\bar{k} \tag{8.42}$$

Scalarul vitezei unghiulare se obține comparând relațiile:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= \frac{d}{dt}(\bar{i}_1\cos\varphi + \bar{j}_1\sin\varphi) = -\bar{i}_1\dot{\varphi}\sin\varphi + \bar{j}_1\dot{\varphi}\cos\varphi = \dot{\varphi}\cdot\bar{j} \\ \dot{\bar{j}} &= \frac{d}{dt}(-\bar{i}_1\sin\varphi + \bar{j}_1\cos\varphi) = -\bar{i}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + \bar{j}_1\dot{\varphi}\sin\varphi = -\dot{\varphi}\cdot\bar{j} \end{aligned} \tag{8.43}$$

cu

$$\begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= \bar{\omega}\times\bar{i} = \omega\,\bar{k}\times\bar{i} = \omega\,\bar{j} \\ \dot{\bar{j}} &= \bar{\omega}\times\bar{j} = \omega\,\bar{k}\times\bar{j} = -\omega\,\bar{i} \end{aligned} \tag{8.44}$$

Este evident că

$$\omega = \dot{\varphi} \tag{8.45}$$

Din acest motiv vectorul $\bar{\omega}$ este denumit viteză unghiulară, acelaşi pentru toate punctele rigidului.

Din (8.42) rezultă scalarul vectorului $\bar{\varepsilon}$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \tag{8.46}$$

Din acest motiv vectorul $\bar{\varepsilon}$ se numeşte acceleraţie unghiulară instantanee, aceeaşi pentru toate punctele rigidului.

Se scrie dezvoltat relaţia (8.39)

$$v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

şi se proiectează pe axele reperului mobil, obţinând astfel componentele scalare ale vitezei pe axele sistemului de referinţă legat de corp

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega \cdot y \\ v_y &= \omega \cdot x \\ v_z &= 0 \end{aligned} \tag{8.47}$$

şi în continuare modulul vitezei

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega R, \tag{8.48}$$

unde R reprezintă distanţa de la punctul M la axa de rotaţie.

Notăm vectorul $\overline{O'M} = \bar{R}$ (fig. 8.3). Rezultă că $\bar{r} = \overline{OO'} + \bar{R}$ şi înlocuim această expresie a vectorului de poziţie în (8.39)

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times (\overline{OO''} + \bar{R}) = \bar{\omega} \times \overline{OO''} + \bar{\omega} \times \bar{R} = \bar{\omega} \times \bar{R} \tag{8.49}$$

Termenul $\bar{\omega} \times \overline{OO'}$ este nul deoarece cei doi vectori sunt coliniari.

Observaţii referitoare la distribuţia vitezelor în mişcarea de rotaţie:

1) Singurele puncte care au viteză nulă sunt cele care aparţin axei de rotaţie.
2) Vitezele sunt conţinute în plane normale la axa de rotaţie.
3) Punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotaţie au vitezele egale.

4) Pe o dreaptă care întâlneşte axa de rotație sub un unghi drept vectorul viteză variază liniar fiind normal pe dreaptă.

Distribuția acceleraților

Întrucât $\bar{r}_{10} = 0, \bar{v}_0 = 0$ şi $\bar{a}_0 = 0$ relația (8.24) devine:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \tag{8.50}$$

Înlocuim $\bar{r} = \overline{OO'} + \overline{R}$ în (8.50)

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{\varepsilon} \times (\overline{OO'} + \overline{R}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\overline{OO''} + \overline{R})] = \bar{\varepsilon} \times \overline{R} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{R}) = \\ &= \bar{\varepsilon} \times \overline{R} - \omega^2 \overline{R} \end{aligned} \tag{8.51}$$

Termenul $\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{\varepsilon} \times \overline{R}$ se numeşte componenta tangențială a acceleraței, iar termenul $\bar{a}_\nu = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -\omega^2 \overline{R}$ reprezintă componenta normală a acceleraței punctului M.

Se poate scrie:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_\nu \tag{8.52}$$

unde

$$\begin{aligned} \bar{a}_\tau &= \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{\varepsilon} \times \overline{R} \\ \bar{a}_\nu &= \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -\omega^2 \overline{R} \end{aligned} \tag{8.53}$$

Proiecțiile vectorului acceleraţie pe axele reperului mobil se obțin din scrierea analitica a relației (8.50)

$$a_X \bar{i} + a_Y \bar{j} + a_Z \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} \tag{8.54}$$

care se înmulțeşte scalar cu versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

$$\begin{aligned} a_X &= -\varepsilon y - \omega^2 x \\ a_Y &= \varepsilon x - \omega^2 y \\ a_Z &= 0 \end{aligned} \tag{8.55}$$

Modulul vectorului acceleraţie este

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)\cdot(\varepsilon^2 + \omega^4)} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (8.56)$$

Relaţiile (8.55) şi (8.56) conduc la urmatoarele *observaţii* privind distribuţia de acceleraţii:

1) Singurele puncte care au acceleraţie nulă sunt cele care aparţin axei de rotaţie.
2) Vectorul acceleraţie este conţinut într-un plan normal la axa de rotaţie.
3) Pe o dreaptă care întâlneşte axa de rotaţie sub un unghi drept vectorul acceleraţie variază liniar.
4) Punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotaţie au aceeaşi acceleraţie.
5) Vectorii acceleraţie ai punctelor rigidului fac cu razele traiectoriilor circulare corespunzătoare acelaşi unghi ascuţit β

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{|a_\tau|}{|a_\nu|} = \frac{|\varepsilon|\cdot R}{\omega^2\cdot R} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad (8.57)$$

Dacă vectorul acceleraţie unghiulară $\bar{\varepsilon}$ este nul, mişcarea rigidului se numeşte mişcare de rotaţie uniformă.

Dacă $\bar{\varepsilon}$ este constant, mişcarea se numeşte mişcare de rotaţie uniform variată şi anume uniform accelerată dacă $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ au acelaşi sens şi uniform încetinită dacă $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ au sensuri opuse.

Cunoscând turaţia *n* în *rotaţii pe minut*, viteza unghiulară ω a rigidului se determină cu relaţia

$$\omega = \frac{2\pi\cdot n}{60} = \frac{\pi\cdot n}{30}\ [s^{-1}] \qquad (8.58)$$

8.4.3. Mişcarea de rototranslaţie

Mişcarea unui rigid este de rototranslaţie sau elicoidală dacă o dreaptă aparţinând acestuia îşi păstrează suportul fix. Această dreaptă se numeşte axa mişcării elicoidale sau axa mişcării de rototranslaţie. Câteva exemple de mişcări de rototranslaţie sunt: mişcarea şurubului într-o piuliţă fixă, mişcarea burghiului maşinii de găurit, mişcarea sapelor utilajelor de forat etc.

Pentru studiul mişcării elicoidale a unui corp (C) alegem un reper $Oxyz$ legat de corp cu axa Oz în coincidenţă cu axa mişcării de roto-translaţie şi un reper fix $O_1x_1y_1z_1$ cu axa O_1z_1 suprapusă în acelaşi sens peste axa Oz (fig. 8.4).

Astfel punctul O al corpului se deplasează numai pe axa O_1z_1 având la un moment dat cota z_{10}, viteza $\bar{v}_0$ şi acceleraţia $\bar{a}_0$.

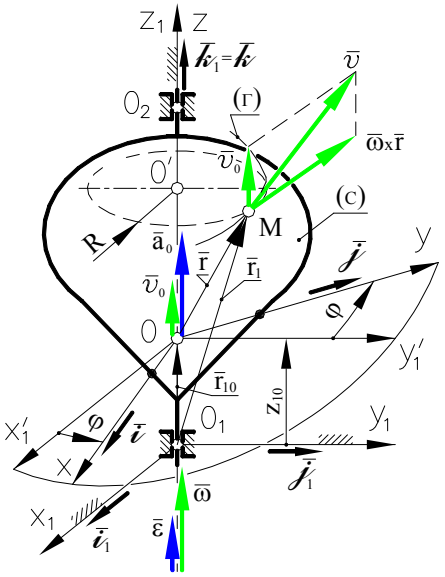


Fig. 8.4

Dacă se notează cu φ unghiul dintre axa Ox şi axa Ox_1', paralelă cu axa fixă O_1x_1, rezultă următoarele particularităţi ale mişcării corpului:

$$\begin{cases} x_{10} = 0 \\ y_{10} = 0 \\ z_{10} = z_0(t) \end{cases} \tag{8.59}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi; & \beta_1 = \sin\varphi; & \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\sin\varphi; & \beta_2 = \cos\varphi; & \gamma_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0; & \gamma_3 = 0; & \gamma_3 = 1 \end{cases} \tag{8.60}$$

Câmpul traiectoriilor

Înlocuind (8.59) şi (8.60) în (8.2) rezultă ecuaţiile parametrice ale unui punct oarecare M aparţinând corpului în mişcare de rototranslaţie:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z_1 = z_0 + z \end{cases} \tag{8.61}$$

Eliminând parametrul φ între primele două ecuații se obține:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 = R^2 \\ z_1 = z_0 + z \end{cases} \tag{8.62}$$

Ecuațiile (8.62) exprimă faptul că traiectoriile punctelor rigidului sunt elice de pas variabil situate pe un cilindru de rază R (R reprezintă distanța de la punct la axa mișcării de rototranslație).

Ținând seama că mișcarea de roto-translație poate fi definită prin două funcții scalare $z_{10} = z_{10}(t)$ şi $\varphi = \varphi(t)$, rezultă că, în acest caz, solidul rigid are *două grade de libertate*.

Distribuția vitezelor (fig. 8.4)

Legea distribuției vitezelor este dată de relația generală

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{8.63}$$

Termenul $\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_{10} = \dfrac{d}{dt}\left(z_{10}\bar{k}\right) = \dot{z}_{10}\bar{k} = v_0\bar{k}$ este specific mişcării de translație a rigidului în lungul axei mişcării de roto-translație, iar termenul $\bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \bar{R}$ este specific mişcării de rotație a rigidului în jurul axei de roto-translație.

Întrucât versorul $\bar{k} = \text{constant}$, avem $\dot{\bar{k}} = 0$ sau $\bar{\omega} \times \bar{k} = 0$, adică

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k} \tag{8.64}$$

Se pot scrie relațiile:

$$\begin{cases} \bar{i} = \bar{i}_1\cos\varphi + \bar{j}_1\sin\varphi \\ \bar{j} = -\bar{i}_1\sin\varphi + \bar{j}_1\cos\varphi \\ \bar{k} = \bar{k}_1 \end{cases}$$

Derivându-le în raport cu timpul obținem:

$$\dot{\bar{i}} = \dot{\varphi}\,\bar{j},\ \ \dot{\bar{j}} = -\dot{\varphi}\,\bar{i},\ \ \dot{\bar{k}} = 0. \tag{8.65}$$

Pe de altă parte:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{i}} &= \bar{\omega}\times\bar{i} = \omega\bar{k}\times\bar{i} = \omega\bar{j}\\ \dot{\bar{j}} &= \bar{\omega}\times\bar{j} = \omega\bar{k}\times\bar{j} = -\omega\bar{i}\\ \dot{\bar{k}} &= \bar{\omega}\times\bar{k} = \omega\bar{k}\times\bar{k} = 0\end{aligned} \tag{8.66}$$

Din compararea relațiile (8.65) şi (8.66) rezultă

$$\omega = \dot{\varphi}\,. \tag{8.67}$$

Se poate spune ca vectorul $\bar{\omega}$ are direcția axei de roto-translație şi scalarul egal cu derivata în raport cu timpul a unghiului de rotație φ. Din acest motiv se numeşte pe drept vector viteză unghiulară instantanee.

Vectorul $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}\bar{k} = \ddot{\varphi}\bar{k}$ este denumit la rândul lui accelerație unghiulară instantanee. Atât viteza unghiulară $\bar{\omega}$ cât şi accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon}$ sunt aceleaşi pentru toate punctele rigidului.

Se scrie analitic relația (8.63)

$$v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = v_0\bar{k} + \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

Sunt evidente proiecțiile vitezei unui punct oarecare pe axele reperului mobil:

$$\begin{aligned}v_x &= -\omega y\\ v_y &= \omega x\\ v_z &= v_0\end{aligned} \tag{8.68}$$

Modulul vitezei are expresia

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 R^2} \tag{8.69}$$

Din (8.68) şi (8.69) decurg următoarele *observații* privind distribuția vitezelor în mişcarea elicoidală a rigidului:

1) Nu există puncte ale rigidului care să aibă viteza nulă.
2) Punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa mişcării de roto-translație au vitezele egale.

3) Proiecțiile vitezelor punctelor rigidului pe direcția axei mișcării elicoidale sunt egale cu v_0.

Din punctul de vedere al distribuției vitezelor mișcarea de roto-translație poate fi interpretată ca o mișcare compusă dintr-o translație în lungul axei mișcarii de roto-translație și o rotație în jurul aceleeași axe.

Distribuția accelerațiilor (fig. 8.5)

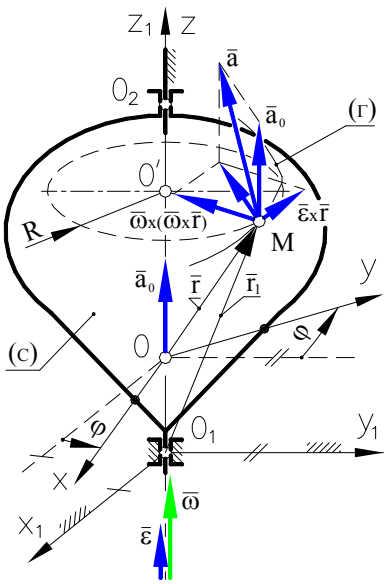


Fig. 8.5

Ținând seama că:

$$\bar{a}_0 = \dot{\bar{v}}_0 = \ddot{z}_0\bar{k} = a_0\bar{k}; \quad \bar{\omega} = \omega\bar{k}; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon\bar{k}$$

relația (8.24) devine :

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = a_0\,\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\varepsilon y - \omega^2 x)\,\bar{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y)\,\bar{j} + a_0\bar{k}$$

de unde rezultă proiecțiile accelerației pe axele reperului mobil:

$$a_x = -\varepsilon y - \omega^2 x;\ a_y = \varepsilon x - \omega^2 y;\ a_z = a_0 \tag{8.70}$$

Modulul acceleraţiei are expresia:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_0^2 + (\varepsilon^2 + \omega^4)(x^2 + y^2)} = \sqrt{a_0^2 + (\varepsilon^2 + \omega^4)R^2} \tag{8.71}$$

Observaţii referitoare la distribuţia vitezelor în mişcarea de roto-translaţie:

1) Nu există puncte ale rigidului cu acceleraţie nulă.
2) Punctele de pe o dreaptă paralelă cu axa mişcării elicoidale au aceeaşi acceleraţie.
3) Proiecţiile acceleraţiilor pe direcţia axei mişcării elicoidale sunt egale cu a_0.

În concluzie distribuţia acceleraţiilor în mişcarea de rototranslaţie reprezintă o suprapunere de două distribuţii: una corespunzătoare unei mişcări de translaţie rectilinie în direcţia axei mişcării de rototranslaţie şi una corespunzătoare unei mişcări de rotaţie în jurul aceleeaşi axe.

Dacă între funcţiile scalare φ şi z_0 ce caracterizează mişcarea elicoidală există o relaţie de forma: $z_{10} = k\varphi;\ \ k = \text{constant}$, mişcarea rigidului se numeşte *mişcare de şurub*. În acest caz solidul rigid are un singur grad de libertate. Notând cu *p* pasul şurubului, se determină valoarea constantei k, având în vedere că la o rotaţie completă cu $\varphi = 2\pi$ corpul înaintează cu un pas: $p = 2\pi k$, de unde $k = p/2\pi$ şi

$$z = \frac{p}{2\pi} \cdot \varphi \tag{8.72}$$

Derivând succesiv în raport cu timpul se obţine:

$$v_0 = \frac{p}{2\pi} \cdot \omega;\quad a_0 = \frac{p}{2\pi} \cdot \varepsilon, \tag{8.73}$$

respectiv

$$\bar{v}_0 = \frac{p}{2\pi} \cdot \bar{\omega} \ \text{ şi } \ \bar{a}_0 = \frac{p}{2\pi} \cdot \bar{\varepsilon} \tag{8.74}$$

8.4.4. Mişcarea plan-paralelă. Mişcarea plană

Un rigid are o *mişcare plan-paralelă* dacă trei puncte necoliniare ale sale sunt conţinute în timpul mişcării într-un plan fix sau altfel spus un plan sau

o secțiune ale corpului rămân permanent în contact cu un plan fix. Ca exemple de mișcări plan-paralele pot fi citate: mișcarea bielei ce leaga pistonul de maneton, mișcarea roții unui vehicul ce se deplasează pe un drum rectiliniu, mișcarea satelitului unui mecanism planetar etc.

Dacă rigidul se reduce la o placă de grosime neglijabilă conținută în planul fix, mișcarea sa se numește *plană.*

8.4.4.1. Studiul geometric

Pentru a studia mișcarea plan-paralelă a unui rigid, se consideră un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$ așa încât axele O_1x_1 și O_1y_1 să determine planul fix și un reper $Oxyz$ legat de corp cu axele Ox și Oy conținute în planul fix (fig. 8.6). Se notează cu x_{10}, y_{10} coordonatele punctului O în planul fix $O_1x_1y_1$ și cu φ unghiul pe care axa Ox îl face cu axa fixă O_1x_1.

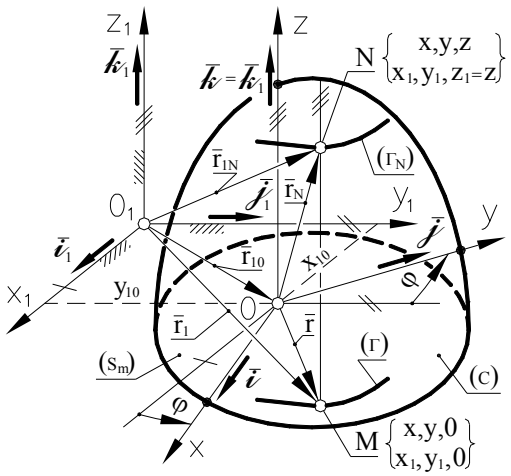


Fig. 8.6

Rezultă următoarele particularitați ale mișcării:

$$\begin{cases} x_{10} = x_{10}(t) \\ y_{10} = y_{10}(t) \\ z_{10} = 0 \end{cases} \tag{8.75}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi; & \beta_1 = \sin\varphi; & \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\sin\varphi; & \beta_2 = \cos\varphi; & \gamma_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0; & \beta_3 = 0; & \gamma_3 = 1 \end{cases} \tag{8.76}$$

Se observă că poziția rigidului este determinată prin trei funcții scalare independente: $x_{10} = x_{10}(t)$, $y_{10} = y_{10}(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Deci în mişcarea plan-paralelă rigidul are trei grade de libertate.

Ținând seama de (8.75) şi (8.76) ecuațiile parametrice (8.2) ale traiectoriei unui punct oarecare *N,* de coordonate *x, y* şi *z* în reperul mobil *Oxyz* devin

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = y_{10} + x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z_1 = z \end{cases} \tag{8.77}$$

Din analiza ecuațiilor (8.76) rezultă că traiectoriile punctelor sunt curbe plane situate în plane paralele cu planul fix de referință $O_1x_1y_1$. Toate punctele situate pe o normală la planul mişcării (paralelă cu *Oz*) descriu traiectorii identice. Este deci suficient să se studieze mişcarea secțiunii mobile (S_m) a rigidului, rezultată din intersecția lui cu planul *Oxy*, în planul fix $O_1x_1y_1$. Se observă că axa *Oz* rămâne paralelă cu axa fixă O_1z_1.

8.4.4.2. Distribuția vitezelor

Se observă din figura 8.6 ca originea *O* a triedrului mobil se mişcă în planul $O_1x_1y_1$. Rezultă că vectorii viteză şi acceleraţie $\bar{v}_0$ şi $\bar{a}_0$ ai acestui punct vor fi conținuți în acest plan, respectiv în planul *Oxy*.

Se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= v_{0x_1}\bar{i}_1 + v_{0y_1}\bar{j}_1 = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} \\ \bar{a}_0 &= a_{0x_1}\bar{i}_1 + a_{0y_1}\bar{j}_1 = a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} \end{aligned} \tag{8.78}$$

În plus $\bar{k} = \bar{k}_1 = \text{constant}$, de unde $\dot{\bar{k}} = 0$, adică $\bar{\omega} \times \bar{k} = 0$ sau:

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k} \tag{8.79}$$

şi

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega}\bar{k} = \varepsilon\bar{k} \tag{8.80}$$

Întrucât versorii $\bar{i}, \bar{j}$ şi $\bar{k}$ ai axelor mobile au aceleaşi expresii ca la mişcarea de rotație şi de roto-translație,

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \bar{i}_1\cos\varphi + \bar{j}_1\sin\varphi; \\ \bar{j} &= -\bar{i}_1\sin\varphi + \bar{j}_1\cos\varphi; \\ \bar{k} &= \bar{k}_1, \end{aligned}$$

vectorii $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ au semnificaţii de viteză unghiulară respectiv acceleraţie unghiulară.

$$\bar{\omega} = \omega \bar{k}\,;\ \omega = \dot{\varphi} \tag{8.81}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \bar{k}\,;\ \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \tag{8.82}$$

În continuare se studiază numai mişcarea secţiunii mobile (S_m) în planul $O_1x_1y_1$ (fig. 8.7).

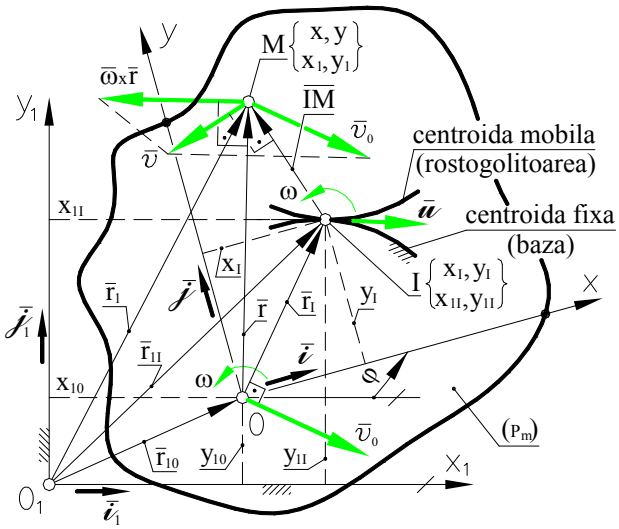


Fig. 8.7

Viteza punctului M de coordonate *x, y* va fi:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (v_{0x} - \omega y)\bar{i} + (v_{0y} + \omega x)\bar{j} \tag{8.83}$$

Rezultă imediat proiecţiile vectorului $\bar{v}$ pe axele mobile:

$$\begin{aligned} v_X &= v_{0x} - \omega y \\ v_y &= v_{0y} + \omega x \\ v_Z &= 0 \end{aligned} \tag{8.84}$$

şi modulul vitezei

$$v = \sqrt{(v_{0x} - \omega y)^2 + (v_{0y} + \omega x)^2} \qquad (8.85)$$

Din relațiile prezentate rezultă următoarele *observații privind* distribuția vitezelor:

1) Viteza unui punct B aparținând secțiunii mobile (P_m) este egală cu suma vectorială dintre viteza unui alt punct A şi viteza relativă de rotație a punctului B față de A.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}\,; \quad \bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB} \qquad (8.86)$$

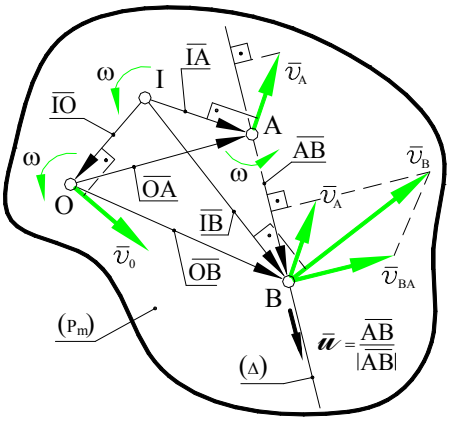


Fig. 8.8

Pentru demonstrație se consideră în figura 8.8 o placă mobilă la care se cunoaşte viteza $\bar{v}_A$ a punctului A, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi poziția punctului B față de A. Se pot scrie relațiile:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OA}$$
$$\bar{v}_B = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OB}$$

Le scădem şi obținem

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times (\overline{OB} - \overline{OA}) = \omega \times \overline{AB}$$

sau

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}\,; \; \bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}$$

Ultima relație poartă numele de *formula lui Euler pentru viteze*.

2) Proiecțiile vitezelor a două puncte pe direcția determinată de ele sunt egale.

Această proprietate se obține înmulțind relația $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$ cu versorul $\bar{u}$ al direcției vectorului $\overline{AB}$:

$$\bar{v}_B \cdot \bar{u} = \bar{v}_A \cdot \bar{u} + (\bar{\omega} \times \overline{AB}) \cdot \bar{u}$$

Deoarece $(\bar{\omega} \times \overline{AB}) \cdot \bar{u} = 0$ rezultă:

$$\bar{v}_B \cdot \bar{u} = \bar{v}_A \cdot \bar{u}, \text{ adică } pr(\bar{v}_B)_\Delta = pr(\bar{v}_A)_\Delta \text{ sau } BB' = AA'$$

3) Există un punct şi numai unul aparţinând plăcii mobile care la un moment dat are viteza nulă. Acest punct se numeşte *centru instantaneu de rotație* (*C.I.R.*) şi se notează cu *I*.

Fie *I* un asemenea punct. Notăm cu $\bar{r}_I$ vectorul de poziție al acestuia în reperul mobil şi cu $\bar{r}_{1I}$ vectorul de poziție în reperul fix (fig. 8.7). Considerând dată viteza $\bar{v}_0$ a punctului *O* şi viteza unghiulară, urmărim să determinăm poziția punctului I prin vectorii de pozitie $\bar{r}_I$ şi $\bar{r}_{1I}$. Pentru punctul I relația vitezelor are forma:

$$\bar{v}_I = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_I = 0 \qquad (8.87)$$

Înmulțind această relație vectorial la stânga cu $\bar{\omega}$ rezultă:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_I) = 0, \text{ sau } \bar{\omega} \times \bar{v}_0 + (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_I) \cdot \bar{\omega} - \omega^2 \cdot \bar{r}_I = 0$$

Întrucât $\bar{\omega} \cdot \bar{r}_I = 0$, cei doi vectori fiind ortogonali, obținem poziția punctului I

$$\bar{r}_I = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} \qquad (8.88)$$

În general $\omega \neq 0$ şi prin urmare punctul I este unic definit. Coordonatele punctului I în reperul mobil, cel mai simplu, se obțin anulând în (8.84) proiecțiile vitezei şi înlocuind coordonatele x şi y cu x_I şi y_I.

$$\begin{cases} v_{0x} - \omega y_I = 0 \\ v_{0y} + \omega x_I = 0 \end{cases}$$

Rezultă:

$$x_I = -\frac{v_{0y}}{\omega};\ y_I = \frac{v_{0x}}{\omega} \tag{8.89}$$

Poziția centrului instantaneu de rotație în reperul fix se determină cu relația:

$$\bar{r}_{1I} = \bar{r}_{10} + \bar{r}_I = \bar{r}_{10} + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2} \tag{8.90}$$

care scrisă analitic

$$x_{1I}\,\bar{i}_1 + y_{1I}\,\bar{j}_1 = x_{10}\,\bar{i}_1 + y_{10}\,\bar{j}_1 + \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ v_{0x_1} & v_{0y_1} & 0 \end{vmatrix}$$

conduce la expresia coordanatelor punctului I în reperul fix

$$\begin{aligned} x_{1I} &= x_{10} - \frac{v_{0y_1}}{\omega} \\ y_{1I} &= y_{10} - \frac{v_{0x_1}}{\omega} \end{aligned} \tag{8.91}$$

4) Locul geometric al centrelor instantanee de rotație în raport cu reperul fix poartă numele *de centroidă fixă* sau *bază*, iar în raport cu reperul mobil se numeşte *centroidă mobilă* sau *rostogolitoare.*

În relațiile (8.89) şi (8.91) mărimile $v_{0x}, v_{0y}, v_{0x_1}, v_{0y_1}$ şi ω variază în raport cu timpul. Deci centrul instantaneu de rotație I îşi schimbă poziția atât în raport cu reperul mobil cât şi cu reperul fix (mereu un alt punct al secțiunii sau plăcii mobile devine centru instantaneu de rotație).

Ecuațiile (8.89) reprezintă ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei iar ecuațiile (8.91) ale bazei.

Cele două curbe sunt tangente în I, în timpul mişcării secțiunii sau plăcii mobile rostogolitoarea rostogolindu-se fără alunecare pe bază.

Pentru a demonstra acest lucru se pleacă de la relația vectorială:

$$\bar{r}_{1I} = \bar{r}_{10} + \bar{r}_I = \bar{r}_{10} + x_I\bar{i} + y_I\bar{j}$$

care derivată în raport cu timpul duce la

$$\begin{aligned} \bar{r}_{1I} &= \dot{\bar{r}}_{10} + \dot{x}_I\bar{i} + \dot{y}_I\bar{j} + x_I\dot{\bar{i}} + y_I\dot{\bar{j}} = \bar{v}_0 + \dot{x}_I\bar{i} + \dot{y}_I\bar{j} + x_I\bar{\omega}\times\bar{i} + y_I\bar{\omega}\times\bar{j} = \\ &= \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times(x_I\bar{i} + y_I\bar{j}) + \dot{x}_I\bar{i} + \dot{y}_I\bar{j} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r}_I + \dot{x}_I\bar{i} + \dot{y}_I\bar{j} \end{aligned}$$

Deoarece $\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_I = 0$, rezultă egalitatea

$$\dot{x}_{1I}\bar{i}_1 + \dot{y}_{1I}\bar{j} = \dot{x}_I\bar{i} + \dot{y}_I\bar{j} \tag{8.92}$$

Relația (8.92) exprimă egalitatea dintre viteza de deplasare a punctului *I* pe bază şi viteza de deplasare pe rostogolitoare. Egalitatea vectorială înseamnă şi egalitate în modul, adică punctul *I* parcurge arce elementare egale pe cele două curbe în acelaşi interval de timp *dt*. Baza fiind o curbă fixă, înseamnă că rostogolitoarea se rostogoleşte fără alunecare pe bază. Vectorii viteză fiind egali înseamnă că cele două curbe admit tangentă comună în *I*.

5) Distribuția vitezelor în mişcarea plan-paralelă este identică cu cea din mişcarea de rotație ca şi cum rigidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotație.

Dreapta care este normală pe planul mişcării în punctul *I*, are toate punctele cu viteză nulă şi se numeşte axă instantanee de rotație. Pentru un punct *M* aparținând secțiunii mobile şi pentru punctul *I* se pot scrie relațiile:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OM};\ \bar{v}_I = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OI}$$

Scăzându-le membru cu membru obținem

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\left(\overline{OM}-\overline{OI}\right)=\bar{\omega}\times\overline{IM} \tag{8.93}$$

O relația de forma: $\bar{v}=\bar{\omega}\times\overline{IM}$ este specifică unei mişcări de rotație, iar $v = \omega \cdot IM$.

6) Cunoscând direcțiile vitezelor a două puncte (sau traiectoriile a două puncte) aparținând secțiunii mobile (plăcii mobile), poziția centrului instantaneu de rotație se află la intersecția normalelor la direcțiile vitezelor (la traiectoriile) celor două puncte (fig. 8.9a, b, c, d).

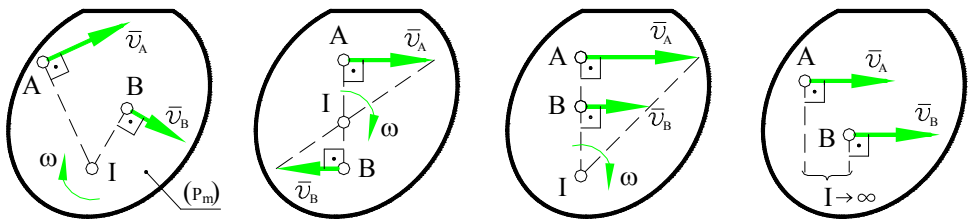


Fig. 8.9

Această proprietate rezultă din expresia $\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{IM}$. Pentru două puncte *A* şi *B* se poate scrie: $\overline{v}_A=\overline{\omega}\times\overline{IA}$ şi $\overline{v}_B=\overline{\omega}\times\overline{IB}$, unde $\overline{IA}\perp\overline{v}_A$ şi $\overline{IB}\perp\overline{v}_B$.

În concluzie, având îndeplinite două condiţii: existenţa la un moment dat a unei axe ale cărei puncte au viteză nulă (axa instantanee de rotaţie) şi exprimarea vitezei unui punct prin produsul vectorial $\overline{\omega}\times\overline{IM}$ $\left(\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{IM}\right)$ se poate afirma că în cazul mişcării plan-paralele distribuţia vitezelor raportată la axa instantanee de rotaţie este o distribuţie specifică unei mişcări de rotaţie pură.

8.4.4.3. Teorema lui Arnhold Kennedy

Teorema lui Arnhold Kennedy, numită şi teorema coliniarităţii celor trei centre intantanee de rotaţie, exprimă faptul că dacă trei elemente plane au mişcări relative unul faţă de altul, centrele lor instantanee relative de rotaţie sunt situate pe aceeaşi linie dreaptă.

Pentru a demonstra această teoremă să considerăm trei corpuri plane 1, 2 şi trei având mişcări relative unul faţă de altul (fig. 8.10). Fie elementele 1 şi 2 care se rotesc în jurul centrelor de rotaţie I_{13}, respectiv I_{23} relativ la elementul fix 3. Astfel centrul instantaneu al elementelor 1 şi 3 este I_{13}, iar al elementelor 2 şi 3 este I_{23}. Acum să considerăm că elementele 1 şi 2 au mişcări relative unul faţă de altul şi că centrul lor mutual instantaneu de rotaţie I_{12} este situat în afara liniei care uneşte centrele I_{13} şi I_{23} pe oricare dintre elementele 1 sau 2. Dacă punctul I_{12} este situat pe elementul 1, viteza lui $\overline{v}_1$ va fi perpendiculară pe linia care uneşte I_{13} şi I_{12}. Similar, dacă punctul I_{12} este considerat pe elementul 2, viteza lui $\overline{v}_2$ va fi perpendiculară pe linia care uneşte I_{23} şi I_{12}. Prin definiţie, se ştie că viteza punctului I_{12} trebuie să fie aceeaşi fie că este pe elementul 1 fie că este pe elementul 2. Acest lucru este posibil numai dacă punctul I_{12} este situat pe linia care uneşte I_{13} şi I_{23}. Astfel este demonstrată teorema lui Arnhold Kennedy. Locaţia la un moment dat a punctului I_{12} pe această linie depinde de magnitudinea vitezelor unghiulare ale elementelor 1 şi 2 relativ la elementul 3.

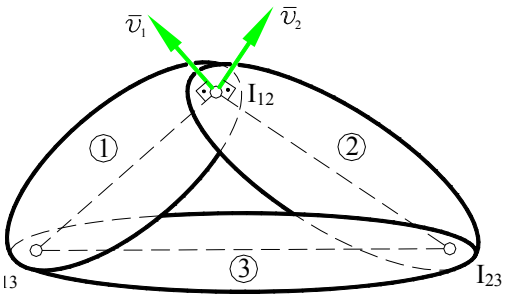


Fig. 8.10

Numărul "N" al centrelor de rotație absolute (permanente sau intantanee) şi relative (permanente sau intantanee), pentru "n" elemente, se determină cu formula:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

8.4.4.4. Distribuția accelerațiilor

Fie în figura 8.11 o placă mobilă (P_m) aflată în mişcare plană. Pentru a cunoaşte distribuția accelerațiilor trebuie cunoscute acceleraţia $\bar{a}_0$ a unui punct *O* al plăcii, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$.

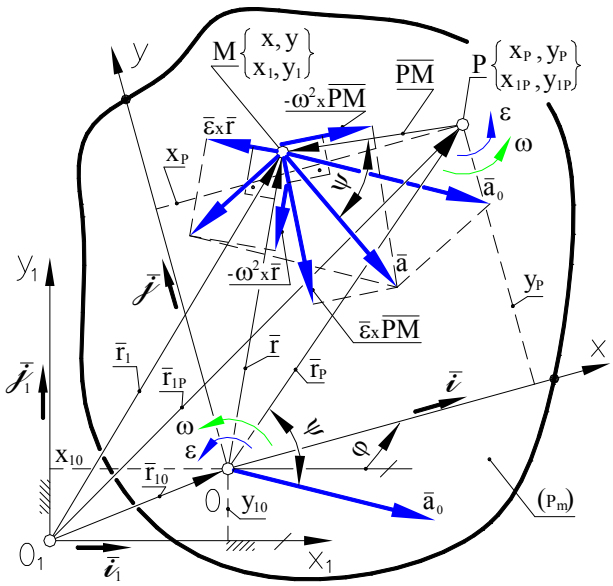


Fig. 8.11

Relaţia (8.24), ţinând seama de particularităţile mişcării plane se poate scrie dezvoltat:

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega x & \omega y & 0 \end{vmatrix}$$

de unde rezultă proiecţiile vectorului acceleraţie corespunzătoare unui punct oarecare $M(x, y)$ al plăcii:

$$a_x = a_{0x} - \varepsilon y - \omega^2 x\,;\; a_y = a_{0y} + \varepsilon x - \omega^2 y\,;\; a_z = 0 \qquad (8.94)$$

Modulul acceleraţiei se obţine cu relaţia

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (8.95)$$

În cazul mişcării plane ţinând seama că vectorii $\bar{\omega}$ şi $\overline{OM} = \bar{r}$ sunt ortogonali, relaţia (8.24) poate fi pusă sub forma:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right) = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r} \qquad (8.96)$$

Relaţiile (8.94) şi (8.95) conduc la următoarele *proprietăţi* ale distribuţiei acceleraţiilor:

1) Acceleraţia oricărui punct aparţinând plăcii (secţiunii) mobile reprezintă o sumă vectorială dintre o acceleraţie $\bar{a}_O$ caracteristică unei mişcări de translaţie şi o acceleraţie $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right)$ sau $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} - \omega^2 \bar{r}$ corespunzătoare unei mişcări relative de rotaţie în jurul unei axe normale pe planul mişcării în punctul *O*.

2) Există, la un moment dat, un singur punct aparţinând plăcii mobile a cărui acceleraţie instantanee este nulă. Acest punct se numeşte *polul acceleraţiilor*, în figura 8.11 fiind notat P.

Fie $\bar{r}_P$ vectorul de poziţie al punctului *P* în reperul mobil. Căutăm soluţia ecuaţiei vectoriale:

$$\bar{a}_P = 0 = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_P - \omega^2 \bar{r}_P \qquad (8.97)$$

Înmulţim ecuaţia (8.97) vectorial la stânga cu $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \left(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_P\right) - \omega^2 \left(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_P\right) = 0$$

care se poate scrie sub forma:

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_0 + \left(\bar{\varepsilon} \cdot \bar{r}_P\right)\bar{\varepsilon} - \varepsilon^2 \bar{r}_P - \omega^2 \left(\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_P\right) = 0 \qquad (8.98)$$

Din (8.97) rezultă expresia: $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_P = \omega^2 \bar{r}_P - \bar{a}_0$, pe care o înlocuim în (8.98). Deoarece $\bar{\varepsilon} \cdot \bar{r}_P = 0$, rezultă:

$$\bar{r}_P = \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_0 + \omega^2 \bar{a}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{8.99}$$

Cum $\varepsilon^2 + \omega^4 \neq 0$ punctul *P* este unic definit.

Coordonatele punctului *P* în sistemul de referință mobil se obțin din scrierea analitică a relației (2.99):

$$x_P \bar{i} + y_P \bar{j} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4} \left(\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ a_{0x} & a_{0y} & 0 \end{vmatrix} + \omega^2 \left(a_{0x} \bar{i} + a_{0y} \bar{j} \right) \right)$$

$$x_P = \frac{-\varepsilon a_{0y} + \omega^2 a_{0x}}{\varepsilon^2 + \omega^4}; \; y_P = \frac{\varepsilon a_{0x} + \omega^2 a_{0y}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{8.100}$$

Poziția polului accelerațiilor în reperul fix rezultă din ecuația vectorială

$$\bar{r}_{1P} = \bar{r}_{10} + \bar{r}_P$$

respectiv

$$x_{1p} \bar{i}_1 + y_{1P} \bar{j}_1 = x_{10} \bar{i}_1 + y_{10} \bar{j}_1 + \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4} \left(\begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ a_{0x_1} & a_{0y_1} & 0 \end{vmatrix} + \omega^2 \left(a_{0x_1} \bar{i}_1 + a_{0y_1} \bar{j}_1 \right) \right) \tag{8.101}$$

de unde se obțin coordonatele absolute ale polului accelerațiilor:

$$x_{1P} = x_{10} + \frac{-\varepsilon a_{0y_1} + \omega^2 a_{0x_1}}{\varepsilon^2 + \omega^4}; \; y_{1P} = y_{10} + \frac{\varepsilon a_{0x_1} + \omega^2 a_{0y_1}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{8.102}$$

3) Comparând relațiile $\bar{r}_I = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2}$ şi $\bar{r}_P = \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_0 + \omega^2 \bar{a}_0}{\omega^4 + \varepsilon^2}$ rezultă că în general cele două puncte sunt distincte, centrul instantaneu de rotație având accelerație iar polul accelerațiilor având viteză.

4) Distribuția accelerațiilor în mişcarea plană este una corespunzătoare unei mişcări de rotație, ca şi cum placa mobilă (sau secțiunea mobilă) s-

ar roti în jurul unei axe normale pe planul mişcării în polul acceleraţiilor numită axa instantanee a acceleraţiilor.

Pentru demonstraţie scriem expresia (2.96) pentru un punct oarecare *M* şi pentru punctul *P*:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OM} - \omega^2 \overline{OM}$$
$$0 = a_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OP} - \omega^2 \overline{OP}$$

Făcând diferenţa membru cu membru obţinem:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \overline{PM} - \omega^2 \overline{PM} \tag{8.103}$$

Cele două componente ale acceleraţiei date de (8.103) sunt ortogonale. Componenta $\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \overline{PM}$ se numeşte componentă tangenţială iar $\bar{a}_\nu = -\omega^2 \overline{PM}$ se numeşte componentă normală.

Modulul acceleraţiei este dat de relaţia

$$a = \sqrt{\left|\bar{\varepsilon} \times \overline{PM}\right|^2 + \omega^4 \overline{PM}^2} = PM\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{8.104}$$

Unghiul ascuţit care îl face vectorul acceleraţie cu direcţia determinată de un punct şi polul acceleraţiilor nu depinde de poziţia punctului la care se referă acceleraţia.

$$tg\psi = \frac{\left|\bar{a}_\tau\right|}{\left|\bar{a}_\nu\right|} = \frac{\left|\varepsilon\right|}{\omega^2} \tag{8.105}$$

5) Cunoscând acceleraţia unui punct A notată $\bar{a}_A$, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$, acceleraţia $\bar{a}_B$ a unui alt punct *B* aparţinând aceleaşi secţiuni mobile aflate în mişcare plană (fig.8.12) se determină cu relaţia:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} \tag{8.106}$$

unde:

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}^\tau_{BA} + \bar{a}^\nu_{BA};\ \bar{a}^\tau_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB};\ \bar{a}^\nu_{BA} = -\omega^2 \overline{AB}$$

Termenul $\bar{a}_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}$ se numeşte acceleraţie relativă de rotaţie a punctului *B* faţă de punctul *A*.

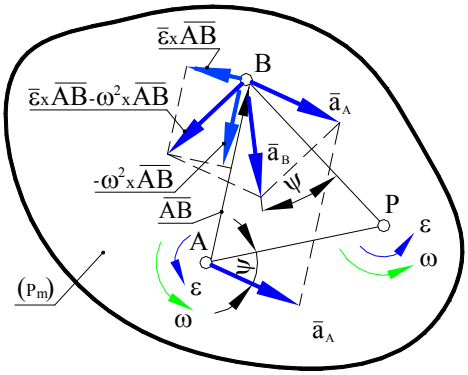


Fig 8.12

Formula (8.106) rezultă din relația (8.96) pusă sub forma:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OM} - \omega^2 \overline{OM}$$

în care se înlocuieşte *M* cu *B* şi *O* cu *A*

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}$$

6) Pe baza relațiilor (8.103) şi (8.104) se poate construi acceleraţia unui punct *M* dacă se cunoaşte poziția polului acceleraţiilor, viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$.

Mai întâi determină mărimile: $\psi = \text{arctg}\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ şi $a = PM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, apoi se duce prin punctul *M* o direcţie care închide cu direcţia *PM* un unghi ascuţit ψ, măsurat în sens orar dacă sensul lui ε este antiorar şi în sens antiorar dacă sensul lui ε este orar, pe care se măsoară segmentul *a*, la scara acceleraţiilor (fig.2.13).

7) Dacă se dă acceleraţia $\bar{a}$ a unui punct *M*, viteza unghiulară ω şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$ se poate determina poziţia polului acceleraţiilor *P*.

Pentru aceaste se determină mărimile $\psi = \text{arctg}\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ şi $PM = \dfrac{a}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$. În continuare se duce prin *M* o direcţie, care închide cu vectorul acceleraţie

unghiul ascuțit ψ măsurat în sensul lui ε, pe care se măsoară distanța *MP=PM* (fig. 2.13).

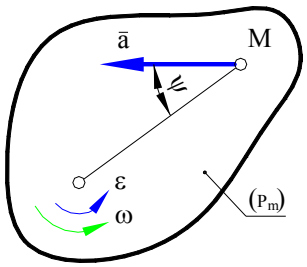


Fig. 8.13

8.4.5. Mişcarea rigidului cu un punct fix

Dacă un solid rigid se mişcă astfel încât un punct al său rămâne fix, mişcarea lui poartă numele de mişcare sferică sau cu un punct fix.

Se consideră în figura 8.14 un rigid *(C)* aflat în mişcare sferică.

Pentru studiul mişcării se alege un reper fix $O_1x_1y_1z_1$ şi unul mobil legat de corp $Oxyz$ având originile O_1 şi O confundate cu punctul fix al corpului.

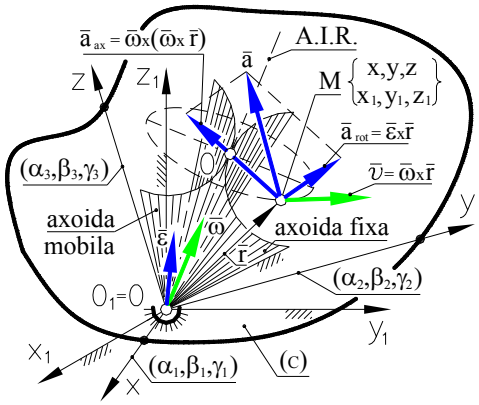


Fig. 8.14

Rezultă următoarele particularităţi ale mişcării:

$$\begin{cases} x_{10} = 0 \\ y_{10} = 0; \\ z_{10} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_i(t) \\ \beta_i = \beta_i(t), \ (i = 1,2,3), \\ \gamma_i = \gamma_i(t) \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \psi = \psi(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \qquad (8.107)$$

Deci, rigidul aflat în mişcare sferică are trei grade de libertate definite de cele trei unghiuri ale lui Euler.

Problema traiectoriilor

Înlocuind în (8.2) particularităţile mişcării rezultă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei unui punct *M* oarecare al rigidului aflat în mişcare sferică:

$$\begin{cases} x_1 = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 \\ y_1 = x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3 \\ z_1 = x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 \end{cases} \qquad (8.108)$$

Ridicând la pătrat ecuaţiile (8.108) şi sumând membru cu membru obţinem ecuaţia unei sfere:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (8.109)$$

S-a ţinut seama că:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \quad (i = 1,2,3)$$

şi

$$\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = 0, \ (i = 1,2,3; \ \ j = 1,2,3; \ \ i \neq j)$$

Ecuaţia (8.109) arată că traiectoriile punctelor corpului sunt curbe situate pe sfere cu centrul în punctul fix şi razele egale cu distanţele de la punctul fix la punctele considerate

Problema vitezelor

Deoarece punctul *O* rămâne fix, $\bar{v}_0 = 0$ şi legea distribuţiei vitezelor capătă forma:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (8.110)$$

Această relaţie am întâlnit-o la distribuţia vitezelor în mişcarea de rotaţie a rigidului. Pentru a putea afirma că distribuţia de viteze în mişcarea sferică este una corespunzătoare unei mişcări de rotaţie cu viteza unghiulară instantanee $\bar{\omega}$ mai trebuie să existe o axă ale cărei puncte să aibă la momentul *t* viteze nule. Impunând condiţia $\bar{\omega} \times \bar{r} = 0$ rezultă soluţia:

$$\bar{r} = \lambda\bar{\omega} \tag{8.111}$$

Ecuatia (8.111) reprezintă ecuația vectorială a axei instantanee de rotație *(AIR)*, fiind de fapt suportul vectorului $\bar{\omega}$. Deci, mişcarea sferică este reductibilă din punct de vedere al distribuției vitezelor la o mişcare de rotație în jurul axei instantanee de rotație (suportul vectorului $\bar{\omega}$).

În sistemul de referință mobil ecuația (8.111) se poate pune sub forma:

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

de unde rezultă proiecțiile vitezei pe axele reperului mobil

$$\begin{cases} v_x = \omega_y z - \omega_z y \\ v_y = \omega_z x - \omega_x z \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x \end{cases} \tag{8.112}$$

Analog, proiecțiile vitezei pe axele reperului fix sunt:

$$\begin{cases} v_{x_1} = \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1 \\ v_{y_1} = \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1 \\ v_{z_1} = \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1 \end{cases} \tag{8.113}$$

În relațiile (8.112) şi (8.113) s-au notat cu ω_x, ω_y, ω_z proiecțiile vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ pe axele reperului mobil respectiv şi cu ω_{x_1}, ω_{y_1}, ω_{z_1} proiecțiile aceluiaşi vector pe axele reperului fix.

Ecuațiile axei instantanee de rotație în cele două repere se determină impunând condiția ca vectorii $\bar{r}$ şi $\bar{\omega}$, respectiv $\bar{r}_1$ şi $\bar{\omega}$ să fie coliniari.

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \tag{8.114}$$

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}} \tag{8.115}$$

Deoarece vectorul $\overline{\omega}$ este variabil atât în direcţie cât şi în modul, axa instantanee de rotaţie îşi schimbă poziţia în cele două repere generând în reperul mobil o suprafaţă riglată numită *axoidă mobilă* sau *con polodic* iar în reperul fix o suprafaţă riglată numită *axoidă fixă* sau *con hiperbolic*.

În timpul mişcării rigidului conul polodic se rostogoleşte fără alunecare pe conul herpolodic, cele două suprafeţe fiind tangente în lungul generatoarei comune reprezentată de axa instantanee de rotaţie.

Problema acceleraţiilor

Ţinând seama de particularităţile mişcării $\left(\bar{a}_0 = 0\right)$ relaţia (8.24) devine în acest caz:

$$\bar{a} = \overline{\varepsilon} \times \bar{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \bar{r}\right) \tag{8.116}$$

Componenta $\bar{a}_{ax} = \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \bar{r}\right)$ poartă numele de acceleraţie axipetă şi este un vector îndreptat spre axa instantanee de rotaţie (A.I.R.) având modulul egal cu pătratul vitezei unghiulare înmulţit cu distanţa de la punctul *M* la A.I.R.

Din figura 8.14 se poate scrie: $\bar{r} = \overline{OO'} + \overline{O'M};\ \overline{O'M} \perp \overline{\omega}$.

Deci,

$$\bar{a}_{ax} = \overline{\omega} \times \left[\overline{\omega} \times \left(\overline{OO'} + \overline{O'M}\right)\right] = \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{OO'} + \overline{\omega} \times \overline{O'M}\right) = \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{O'M}\right) =$$
$$= \left(\overline{\omega} \cdot \overline{O'M}\right)\overline{\omega} - \omega^2 \overline{O'M} = -\omega^2 \overline{O'M};$$
$$\left|\bar{a}_{ax}\right| = \omega^2 \left|\overline{O'M}\right|$$

Componenta $\bar{a}_{rot} = \overline{\varepsilon} \times \bar{r}$ se numeşte acceleraţie de rotaţie şi are valoarea egală cu produsul dintre acceleraţia unghiulară şi distanţa de la punctul M la suportul vectorului $\overline{\varepsilon}$

$$\left|\bar{a}_{ax}\right| = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\beta = \varepsilon \cdot d$$

Notând cu $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ proiecţiile vectorului unghiulară $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ pe axele reperului mobil, relaţia (2.116) se poate scrie analitic:

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix}$$

de unde rezultă proiecţiile vectorului acceleraţie pe axele reperului mobil:

$$\begin{aligned} a_x &= -\left(\omega_y^2+\omega_z^2\right)x+\left(\omega_x\omega_y-\varepsilon_z\right)y+\left(\omega_x\omega_z+\varepsilon_y\right)z \\ a_y &= \left(\omega_y\omega_x+\varepsilon_z\right)x-\left(\omega_z^2+\omega_x^2\right)y+\left(\omega_y\omega_z-\varepsilon_x\right)z \\ a_z &= \left(\omega_z\omega_x-\varepsilon_y\right)x+\left(\omega_z\omega_y+\varepsilon_x\right)y-\left(\omega_x^2+\omega_y^2\right)z \end{aligned} \qquad (8.117)$$

Pentru a demonstra că:

$$\varepsilon_x=\dot{\omega}_x;\ \varepsilon_y=\dot{\omega}_y;\ \varepsilon_z=\dot{\omega}_z \qquad (8.118)$$

se pleacă de la relația de definire a vectorului accelerație unghiulară:

$$\bar{\varepsilon}=\dot{\bar{\omega}}$$

care se pune sub forma:

$$\varepsilon_x\bar{i}+\varepsilon_y\bar{j}+\varepsilon_z\bar{k}=\frac{d}{dt}\left(\omega_x\bar{i}+\omega_y\bar{j}+\omega_z\bar{k}\right)=\dot{\omega}_x\bar{i}+\dot{\omega}_y\bar{j}+\dot{\omega}_z\bar{k}+\omega_x\dot{\bar{i}}+\omega_y\dot{\bar{j}}+\omega_z\dot{\bar{k}}=$$

$$=\dot{\omega}_x\bar{i}+\dot{\omega}_y\bar{j}+\dot{\omega}_z\bar{k}+\omega_x\bar{\omega}\times\bar{i}+\omega_y\bar{\omega}\times\bar{j}+\omega_z\bar{\omega}\times\bar{k}=\dot{\omega}_x\bar{i}+\dot{\omega}_y\bar{j}+\dot{\omega}_z\bar{k}+$$

$$+\bar{\omega}\times\left(\omega_x\bar{i}+\omega_y\bar{j}+\omega_z\bar{k}\right)=\dot{\omega}_x\bar{i}+\dot{\omega}_y\bar{j}+\dot{\omega}_z\bar{k}+\bar{\omega}\times\bar{\omega}=\dot{\omega}_x\bar{i}+\dot{\omega}_y\bar{j}+\dot{\omega}_z\bar{k},$$

de unde rezultă relațiile (8.118).

În mişcarea solidului rigidului cu un punct fix nu există în afara punctului fix alte puncte a căror acceleraţie să fie nulă. Considerând în (8.117) $a_x=0,\ a_y=0,\ a_z=0$ se obține un sistem de trei ecuații liniare şi omogene în necunoscutele *x, y, z*. Pentru ca sistemul să admită şi o altă soluție în afară de cea banală $(x=0,y=0,z=0)$, trebuie ca determinantul sistemului să se anuleze.

Dar,

$$D=\begin{vmatrix} -\left(\omega_y^2+\omega_z^2\right) & \omega_x\omega_y-\varepsilon_z & \omega_x\omega_z+\varepsilon_y \\ \omega_y\omega_x+\varepsilon_z & -\left(\omega_z^2+\omega_x^2\right) & \omega_y\omega_z-\varepsilon_x \\ \omega_z\omega_x-\varepsilon_y & \omega_z\omega_y+\varepsilon_x & -\left(\omega_x^2+\omega_y^2\right) \end{vmatrix}=-\left|\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}\right|^2 \qquad (8.119)$$

Deoarece $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ nu sunt în general vectori coliniari rezultă că $D\neq 0$, adică în afara punctului fix nu există nici un alt punct cu acceleraţia nulă.

Distribuţia acceleraţiilor în mişcare sferică este o distribuţie specifică. Aceasta se reduce la o distribuţie specifică unei mişcări de rotaţie numai în cazul când cei doi vectori $\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ sunt coliniari.

8.5. Componentele scalare ale vitezei şi acceleraţiei unghiulare pe axele sistemelor de referinţă mobil şi fix în funcţie de cosinusurile directoare, unghiurile lui Euler şi derivatele acestora în raport cu timpul

Situarea în spaţiu a rigidului cu un punct fix poate fi definită prin cele nouă cosinusuri directoare ale axelor reperului mobil Oxyz, legat de rigid, în raport cu axele reperului fix $O_1x_1y_1z_1$ sau prin cele trei unghiuri ale lui Euler (fig.8.15). Se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} \tag{8.120}$$

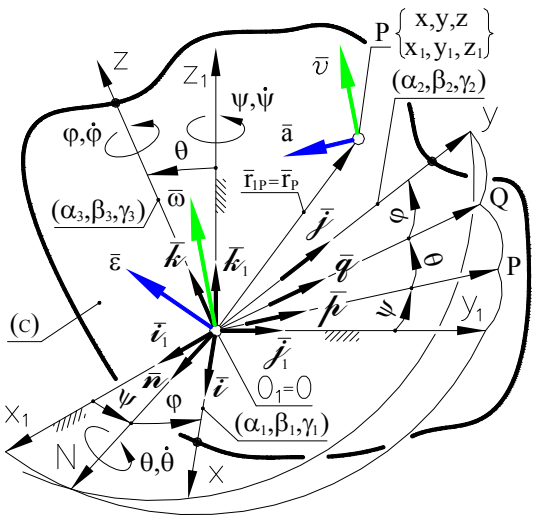


Fig. 8.15

Prin derivare obţinem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{i}} \\ \dot{\bar{j}} \\ \dot{\bar{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 & \dot{\beta}_1 & \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\alpha}_2 & \dot{\beta}_2 & \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\alpha}_3 & \dot{\beta}_3 & \dot{\gamma}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{bmatrix} \tag{8.121}$$

Definirea vectorului viteză unghiulară s-a făcut prin proiecțiile sale pe axele reperului mobil egale cu:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\bar{j}}\cdot\bar{k} = -\dot{\bar{k}}\cdot\bar{j} = \dot{\alpha}_2\alpha_3 + \dot{\beta}_2\beta_3 + \dot{\gamma}_2\gamma_3 = -\left(\alpha_2\dot{\alpha}_3 + \beta_2\dot{\beta}_3 + \gamma_2\dot{\gamma}_3\right)\\
\omega_y &= \dot{\bar{k}}\cdot\bar{i} = -\dot{\bar{i}}\cdot\bar{k} = \dot{\alpha}_3\alpha_1 + \dot{\beta}_3\beta_1 + \dot{\gamma}_3\gamma_1 = -\left(\alpha_3\dot{\alpha}_1 + \beta_3\dot{\beta}_1 + \gamma_3\dot{\gamma}_1\right)\\
\omega_z &= \dot{\bar{i}}\cdot\bar{j} = -\dot{\bar{j}}\cdot\bar{i} = \dot{\alpha}_1\alpha_2 + \dot{\beta}_1\beta_2 + \dot{\gamma}_1\gamma_2 = -\left(\alpha_1\dot{\alpha}_2 + \beta_1\dot{\beta}_2 + \gamma_1\dot{\gamma}_2\right)
\end{aligned} \tag{8.122}$$

Relațiile (8.222) pot fi scrise şi sub formă matriceală

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_3 \\ \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_3 \\ \dot{\gamma}_1 & \dot{\gamma}_2 & \dot{\gamma}_3 \end{bmatrix} \tag{8.123}$$

sau simbolic

$$\left[\hat{\omega}\right] = \left[R\right]^T \cdot \left[\dot{R}\right] \tag{8.124}$$

La acelaşi rezultat se ajunge plecând de la transcrierea matriceala a relației

$$\bar{v}_p = \bar{\omega} \times \bar{r}_p \tag{8.125}$$

$$\left\{ v_p \right\}_{Oxyz} = \left[\hat{\omega}\right] \cdot \left\{ r_p \right\}_{Oxyz} \tag{8.126}$$

Derivând relația:

$$\left\{ \bar{r}_{1p} \right\}_{Ox_1y_1z_1} = \left[R\right] \cdot \left\{ r_p \right\}_{Oxyz} \tag{8.127}$$

obținem:

$$\left\{ v_p \right\}_{Ox_1y\ z_1} = \left[\dot{R}\right] \cdot \left\{ r_p \right\}_{Oxyz} \tag{8.128}$$

Dar:

$$\left\{ v_p \right\}_{Ox_1y_1z_1} = \left[R\right] \cdot \left\{ v_p \right\}_{Oxyz} \tag{8.129}$$

Egalând (8.128) cu (8.129) deducem:

$$\left\{ v_p \right\}_{Oxyz} = [R]^T [\dot{R}] \left\{ r_p \right\}_{Oxyz} \tag{8.130}$$

Comparând (8.226) cu (8.230) rezultă:

$$[\hat{\omega}] = [R]^T [\dot{R}] \tag{8.131}$$

Pentru a afla proiecțiile vectorului viteză unghiulară pe axele reperului fix transcriem matriceal expresia

$$\bar{v}_p = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{1p} \text{ , unde : } \bar{\omega}_1 = \omega_{x_1} \bar{i}_1 + \omega_{y_1} \bar{j}_1 + \omega_{z_1} \bar{k}_1 \tag{8.132}$$

$$\left\{ v_p \right\}_{Ox_1y_1z_1} = [\hat{\omega}_1] \left\{ r_{1p} \right\} = [\hat{\omega}_1][R] \left\{ r_p \right\}_{Oxyz} \tag{8.133}$$

Din compararea relațiilor (8.128) şi (2.133) deducem:

$$[\dot{R}] = [\hat{\omega}_1][R] \text{ sau } [\hat{\omega}_1] = [\dot{R}][R]^T \tag{8.134}$$

adică,

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_1} & \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} & 0 & -\omega_{x_1} \\ -\omega_{y_1} & \omega_{x_1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_3 \\ \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_2 \\ \dot{\gamma}_1 & \dot{\gamma}_2 & \dot{\gamma}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{8.135}$$

Proiecțiile acceleraţiei unghiulare în cele două sisteme se obțin derivând în raport cu timpul expresiile analitice ale vectorilor $\bar{\omega}$ şi $\hat{\omega}_1$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \varepsilon_{y_1} \\ \varepsilon_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{x_1} \\ \dot{\omega}_{y_1} \\ \dot{\omega}_{z_1} \end{bmatrix} \tag{8.136}$$

Pentru a calcula proiecțiile vitezei unghiulare pe axele celor două sisteme de referință se determină mai întâi, cu ajutorul matricele de rotație, relațiile dintre versorii axelor reperelor succesive obținute prin rotațiile cu unghiurile ψ, θ şi φ.

$$\begin{bmatrix}\bar{i}_1\\ \bar{j}_1\\ \bar{k}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\psi & -s\psi & 0\\ s\psi & c\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{n}\\ \bar{p}\\ \bar{k}_1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}\bar{n}\\ \bar{p}\\ \bar{k}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{n}\\ \bar{q}\\ \bar{k}\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}\bar{n}\\ \bar{q}\\ \bar{k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\varphi & -s\varphi & 0\\ s\varphi & c\varphi & o\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{i}\\ \bar{j}\\ \bar{k}\end{bmatrix} \tag{8.137}$$

Cea mai simplă cale porneşte de la constatarea ca într-un interval infinit mic de timp rigidul execută o rotație elementară $\bar{\omega}dt$ sau $\bar{\omega}_1 dt$ căreia îi corespund trei rotații elementare în jurul axelor Oz_1, ON, Oz:

$$\bar{\omega}_1 dt = \bar{\omega}dt = \dot{\bar{\psi}}dt + \dot{\bar{\theta}}dt + \dot{\bar{\varphi}}dt = \dot{\psi}\bar{k}_1 dt + \dot{\theta}\bar{n}dt + \dot{\varphi}\bar{k}dt \tag{8.138}$$

de unde rezultă

$$\omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k} = \dot{\psi}\bar{k}_1 + \dot{\theta}\bar{n} + \dot{\varphi}\bar{k} \tag{8.139}$$

$$\omega_{x_1}\bar{i}_1 + \omega_{y_1}\bar{j}_1 + \omega_{z_1}\bar{k}_1 = \dot{\psi}\bar{k}_1 + \dot{\theta}\bar{n} + \dot{\varphi}\bar{k} \tag{8.140}$$

Înmulțind succesiv relația (2.139) cu $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ şi (2.140) cu $\dot{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$, ținând seama de relațiile (8.137), obținem:

$$\begin{cases}\omega_x = \dot{\varphi}\bar{k}_1\cdot\bar{i} + \dot{\theta}\bar{n}\cdot\cdot\bar{i} = \dot{\psi}\left(\bar{q}\,s\theta + \bar{k}\,c\theta\right)\cdot\bar{i} + \dot{\theta}\,c\varphi = \dot{\psi}\bar{q}\cdot\bar{i}\,s\theta + \dot{\theta}\,c\varphi = \dot{\psi}\,s\varphi\,s\theta + \dot{\theta}\,c\varphi\\ \omega_y = \dot{\psi}\,c\varphi\,s\theta - \dot{\theta}\,s\varphi\\ \omega_z = \dot{\psi}\,c\theta + \dot{\varphi}\end{cases} \tag{8.141}$$

$$\begin{cases}\omega_{x_1} = \dot{\theta}\,c\psi + \dot{\varphi}\,s\psi\,s\theta\\ \omega_{y_1} = \dot{\theta}\,s\psi - \dot{\varphi}\,c\psi\,s\theta\\ \omega_{z_1} = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\,c\theta\end{cases} \tag{8.142}$$

sau matriceal:

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\varphi\,s\theta & c\varphi & 0\\ c\varphi\,s\theta & -s\varphi & 0\\ c\theta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} \tag{8.143}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_{x_1}\\ \omega_{y_1}\\ \omega_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & c\psi & s\psi\, s\theta\\ 0 & s\psi & -c\psi\, s\theta\\ 1 & 0 & c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} \tag{8.144}$$

Prin derivarea in raport cu timpul a relațiilor (8.143) şi (8.144) obținem componentele scalare ale vectorilor accelerație unghiulară pe axele celor două sisteme de referință mobil şi fix:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\varphi\, s\theta & c\varphi & 0\\ c\varphi\, s\theta & -s\varphi & 0\\ c\theta & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\psi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c\theta\, s\varphi & -s\varphi & s\theta\, c\varphi\\ c\theta\, c\varphi & -c\varphi & -s\theta\, s\varphi\\ -s\theta & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\dot{\theta}\\ \dot{\theta}\dot{\varphi}\\ \dot{\varphi}\dot{\psi}\end{bmatrix} \tag{8.145}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{x_1}\\ \varepsilon_{y_1}\\ \varepsilon_{z_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & c\psi & s\psi\, s\theta\\ 0 & s\psi & -c\psi\, s\theta\\ 1 & 0 & c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\psi}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-s\psi & s\psi\, c\theta & c\psi\, s\theta\\ c\psi & -c\psi\, c\theta & s\psi\, s\theta\\ 0 & -s\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\psi}\dot{\theta}\\ \dot{\theta}\dot{\varphi}\\ \dot{\varphi}\dot{\psi}\end{bmatrix} \tag{8.146}$$

9. CINEMATICA MIŞCĂRII RELATIVE

9.1. Cinematica mişcării relative a punctului

9.1.1. Generalităţi

În practică se întâlnesc situaţii când un corp, asimilabil cu un punct material, se află în mişcare faţă de un sistem de referinţă care, la rândul lui, este mobil în raport cu un sistem de referinţă fix. O astfel de mişcare a punctului se numeşte mişcare relativă. În acest caz se cer a fi determinaţi parametrii cinematici ce caracterizează mişcarea punctului faţă de reperul fix, atunci când se cunosc parametrii cinematici ce caracterizează mişcarea punctului în raport cu reperul mobil şi parametri cinematici ce caracterizează mişcarea reperului mobil în raport cu cel fix.

Se impune definirea următoarelor noţiuni importante :

a) *Mişcarea absolută* este mişcarea punctului material faţă de reperul fix. Traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului în această mişcare se numesc corespunzător absolute.

b) *Mişcarea relativă* este mişcarea punctului în raport cu reperul mobil. Traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului în această mişcare se numesc corespunzător relative.

c) *Mişcarea de transport* este mişcarea în raport cu reperul fix a unui punct solidar cu reperul mobil care în momentul considerat coincide cu punctul a cărui mişcare se studiază. Traiectoria, viteza şi acceleraţia în această mişcare se numesc corespunzător de transport. Tot *mişcare de transport* se numeşte şi mişcarea reperului mobil faţă de cel fix.

9.1.2. Problema traiectoriilor

Se consideră în figura 3.1 un punct material M aflat în mişcare relativă faţă de reperul Oxyz şi în mişcare absolută faţa de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$.

Presupunând cunoscute ecuaţiile mişcării relative a punctului (ecuaţiile parametrice ale traiectoriei relative a punctului):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{9.1}$$

şi ecuaţiile de mişcare ale reperului mobil faţă de cel fix:

$$\begin{cases} x_{10} = x_{10}(t)\ ;\ y_{10} = y_{10}(t)\ ;\ z_{10} = z_{10}(t) \\ \alpha_i = \alpha_i(t)\ ;\ \beta_i = \beta_i(t)\ ;\ \gamma_i = \gamma_i(t);\ i = 1,2,3, \end{cases} \tag{9.2}$$

se cere determinarea ecuațiilor parametrice ale traiectoriei punctului în raport cu reperul fix:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \\ z_1 = z_1(t) \end{cases} \tag{9.3}$$

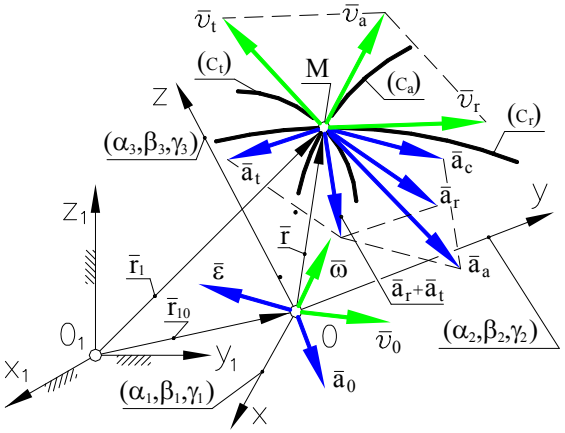


Fig. 9.1

Este evidentă relația vectorială

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{10} + \bar{r} \tag{9.4}$$

Proiectând (9.4) pe axele reperului fix, ținând seama de tabloul cosinusurilor directoare,

	Ox $\bar{i}$	Oy $\bar{j}$	Oz $\bar{k}$
O_1x_1 $\bar{i}_1$	α_1	α_2	α_3
O_1y_1 $\bar{j}_1$	β_1	β_2	β_3
O_1z_1 $\bar{k}_1$	γ_1	γ_2	γ_3

obținem ecuațiile mișcării absolute a punctului sau ecuațiile parametrice ale traiectoriei absolute a punctului:

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ y_1 = y_{10} + \beta_1 y + \beta_2 y + \beta_3 y \\ z_1 = z_{10} + \gamma_1 z + \gamma_2 z + \gamma_3 z \end{cases} \tag{9.5}$$

Expresiile (9.5) pentru x = const , y = const , z = const, devin ecuaţiile parametrice ale traiectoriei de transport ale punctului la momentul t (când se ating aceste coordonate).

9.1.3. Derivata absolută (totală) şi relativă (locală) a unui vector

Se consideră în figura 9.2 un vector variabil $\bar{u}$ având proiecţiile u_x, u_y, u_z, pe axele reperului mobil Oxyz.

Cunoscând viteza unghiulară de transport $\bar{\omega}$ se cere determinarea derivatei în raport cu timpul a vectorului $\bar{u}$.

Se poate scrie:

$$\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k} \tag{9.6}$$

de unde prin derivare obţinem:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \left(\dot{u}_x \bar{i} + \dot{u}_y \bar{j} + \dot{u}_z \bar{k}\right) + \left(u_x \dot{\bar{i}} + u_y \dot{\bar{j}} + u_z \dot{\bar{k}}\right) \tag{9.7}$$

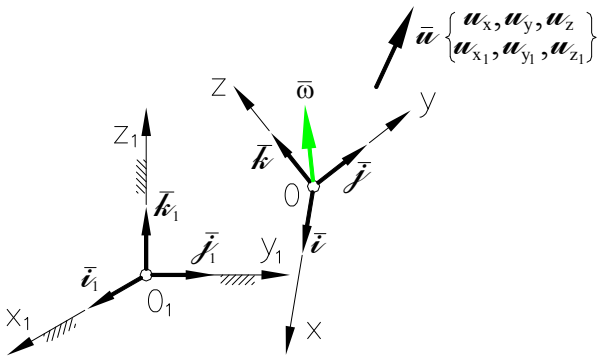


Fig. 9.2

Primul membru al acestei egalităţi reprezintă *derivata totală* sau *absolută* a vectorului $\bar{u}$ şi se notează cu $\frac{d\bar{u}}{dt}$ sau $\dot{\bar{u}}$.

Termeni ce figurează în prima paranteză din membrul al doilea al egalităţii (9.7), reprezintă derivata vectorului $\bar{u}$ presupunând versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

constanți. Această derivată se numeşte *derivata locală* sau *relativă* a vectorului şi măsoară viteza de variație a acestuia înregistrată de un observator solidar cu reperul mobil. Derivata locală se notează $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ sau

$$\dot{\bar{u}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \dot{u}_x \bar{i} + \dot{u}_y \bar{j} + \dot{u}_z \bar{k} \tag{9.8}$$

Luând in considerare formulele lui Poisson:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad \dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}; \tag{9.9}$$

cea de a doua paranteză devine:

$$u_x \dot{\bar{i}} + u_y \dot{\bar{j}} + u_z \dot{\bar{k}} = u_x \bar{\omega} \times \bar{i} + u_y \bar{\omega} \times \bar{j} + u_z \bar{\omega} \times \bar{k} = \bar{\omega} \times \left(u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k} \right) = \bar{\omega} \times \bar{u} \tag{9.10}$$

Luând în considerare (9.8) şi (9.10) expresia derivatei absolute a unui vector, definit în reperul mobil, este

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{u} \tag{9.11}$$

Observație: pentru $\bar{u} = \bar{\omega}$ rezultă:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \tag{9.12}$$

adică derivata absolută a vectorului $\bar{\omega}$ este egală cu derivata sa relativă.

9.1.4. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă

Se presupun cunoscute:

- legea de variație a vectorului poziție $\bar{r} = \bar{r}(t)$ al punctului M in reperul mobil;
- viteza $\bar{v}_0$ a origini reperului mobil;
- viteza unghiulara instantanee $\bar{\omega}$ a reperului mobil.

Se cere determinarea vitezei absolute a punctului M.

Daca se derivează relația (9.4) în raport cu timpul şi se ține seama că vectorul $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ este definit prin proiecțiile sale pe axele triedrului mobil, se obține

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_{10} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{9.13}$$

În (9.13):

$\dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_a$ este vectorul *viteză absolută* a punctului

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} = \bar{v}_r$ este *viteza relativă* a punctului.

$\dot{\bar{r}}_{10} + \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$ reprezintă viteza unui punct solidar cu triedrul mobil, având vectorul de poziție $\bar{r}$, deci este *viteza de transport* a punctului.

Relația (9.13) devine:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \tag{9.14}$$

unde:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}\,; \quad \bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \tag{9.15}$$

Formula (9.15) exprima legea de compunere a vitezelor în mişcarea relativa a punctului conform căreia: *„viteza absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre viteza relativă si viteza de transport a punctului”.*

9.1.5. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a punctului

Se presupun cunoscute:

- legea de variație a vectorului de poziție $\bar{r} = \bar{r}(t)$ al punctului M în reperul mobil;
- acceleraţia $\bar{a}_0$ a origini reperului mobil;
- viteza unghiulară $\bar{\omega}$ si acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}$ ale reperului mobil faţă de cel fix.

Se determină acceleraţia absolută a punctului.

Pentru aceasta se derivează relaţia (9.13) în raport cu timpul:

$$\ddot{\bar{r}}_1 = \ddot{\bar{r}}_{10} + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} + \bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r} \right) \tag{9.16}$$

În relaţia (9.16):

$\ddot{\bar{r}}_1 = \bar{a}_a$ este *acceleraţia absolută* a punctului;

$\ddot{\bar{r}}_{10} = \bar{a}_0$ este acceleraţia originii reperului mobil;

$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}$ este *acceleraţia relativa* a punctului;

$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$ este acceleraţia unghiulară a reperului mobil faţă de cel fix.

Astfel relația (9.16) devine:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \left[\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right)\right] + 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r \qquad (9.17)$$

Termenul din paranteza dreaptă reprezintă accelerația unui punct solidar cu triedrul mobil, având vectorul de poziție $\bar{r}$. Această accelerație este deci *accelerația de transport* a punctului M şi se notează $\bar{a}_t$.

Termenul $2\bar{\omega}\times\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial t} = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r$ se numeşte accelerație complementară sau *accelerația lui Coriolis* şi se notează $\bar{a}_c$.

Cu aceste precizări relația (9.17) devine:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \qquad (9.18)$$

şi exprimă legea compunerii acceleraţiilor în mişcarea relativă conform căreia *„accelerația absolută a unui punct este egală cu suma vectorială dintre accelerația relativă, accelerația de transport şi accelerația lui Coriolis”* .

În (9.18):

$$\begin{cases} \bar{a}_r = \dfrac{\partial^2\bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} \\ \bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right) \\ \bar{a}_c = 2\bar{\omega}\times\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial t} = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r \end{cases} \qquad (.19)$$

Observații:

a) Accelerația lui Coriolis este nulă dacă:

$\bar{v}_r = 0$, caz banal;

$\bar{\omega} = 0$, reperul mobil execută o mişcare de translație fată de reperul fix;

$\bar{v}_r = \lambda\bar{\omega}$, adică viteza relativă este paralelă cu vectorul $\bar{\omega}$. De exemplu cazul unui punct ce se deplasează pe generatoarea unui cilindru aflat în mişcare

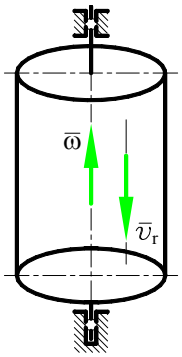


Fig. 9.3

de rotație în jurul axei sale (fig. 9.3)

b) În cazul mişcări relative plane (punctul M se mişcă într-un plan mobil pe un alt plan fix) valoarea acceleraţiei lui Coriolis este:

$$a_c = 2v_r\omega, \tag{9.20}$$

iar direcţia şi sensul vectorului acceleraţie complementară se obţin rotind vectorul $\bar{v}_r$ cu 90° în sensul dat de viteza unghiulară de transport $\bar{\omega}$.

c) Dacă $\bar{v}_r = 0$, $\bar{a}_r = 0$ punctul se află în repaus relativ faţa de reperul mobil Oxyz.

9.2. Cinematica mişcării relative a rigidului

9.2.1. Studiul geometric

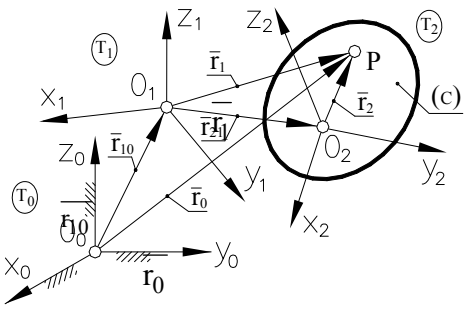


Fig. 9.4

În figura 9.4 se consideră un rigid (C) aflat în mişcare absolută faţă de reperul fix $O_0x_0y_0z_0$ (triedrul T_0) şi în mişcare relativă faţă de reperul mobil $O_1x_1y_1z_1$ (triedrul T_1), de solidul rigid fiind ataşat sistemul propriu $O_2x_2y_2z_2$.

Se cunoaşte situarea (poziţia şi orientarea) triedrului T_1 faţă de T_0 prin coordonatele absolute: x_{10}, y_{10}, z_{10} ale originii O_1 în triedrul T_0 şi cosinusurile directoare: $\alpha_{10}', \beta_{10}', \gamma_{10}', \alpha_{10}'', \beta_{10}'', \gamma_{10}'', \alpha_{10}''', \beta_{10}''', \gamma_{10}'''$ ale axelor triedrului T_1 faţă de T_0, precum şi situarea triedrului T_2, solidar cu rigidul, faţă de triedrul T_1, prin coordonatele relative: x_{21}, y_{21}, z_{21} ale originii O_2 şi

cosinusurile directoare ale axelor triedrului T_2 față de T_1: $\alpha_{21}', \beta_{21}', \gamma_{21}', \alpha_{21}'', \beta_{21}'', \gamma_{21}'', \alpha_{21}''', \beta_{21}''', \gamma_{21}'''$.

Se cere determinarea situării triedrului T_2 față de triedrul T_0 prin coordonatele absolute x_{20}, y_{20}, z_{20} ale originii O_2 sau coordonatele absolute x_0, y_0, z_0 ale unui punct P al rigidului şi cosinusurile directoare absolute $\alpha_{20}', \beta_{20}', \gamma_{20}', \alpha_{20}'', \beta_{20}'', \gamma_{20}'', \alpha_{20}''', \beta_{20}''', \gamma_{20}'''$ ale axelor reperului $O_2x_2y_2z_2$ în triedrul fix T_0.

Se pot alcătui următoarele două tablouri ale cosinusurilor directoare:

	$\overline{i_1}$	$\overline{j_1}$	$\overline{k_1}$
$\overline{i_0}$	α_{10}'	α_{10}''	α_{10}'''
$\overline{j_0}$	β_{10}'	β_{10}''	β_{10}'''
$\overline{k_0}$	γ_{10}'	γ_{10}''	γ_{10}'''

	$\overline{i_2}$	$\overline{j_2}$	$\overline{k_2}$
$\overline{i_1}$	α_{21}'	α_{21}''	α_{21}'''
$\overline{j_1}$	β_{21}'	β_{21}''	β_{21}'''
$\overline{k_1}$	γ_{21}'	γ_{21}''	γ_{21}'''

Fie un punct P aparţinând corpului. Între coordonatele punctului P în raport cu T_0 şi T_1 şi respectiv în raport cu T_1 şi T_2 se pot scrie relaţiile matriceale :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' & x_{10} \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' & y_{10} \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad (9.21)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{21}' & \alpha_{21}'' & \alpha_{21}''' & x_{21} \\ \beta_{21}' & \beta_{21}'' & \beta_{21}''' & y_{21} \\ \gamma_{21}' & \gamma_{21}'' & \gamma_{21}''' & z_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad (9.22)$$

sau

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \qquad (9.23)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{21}' & \alpha_{21}'' & \alpha_{21}''' \\ \beta_{21}' & \beta_{21}'' & \beta_{21}''' \\ \gamma_{21}' & \gamma_{21}'' & \gamma_{21}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

Înlocuind (9.22) în (9.21) respectiv (9.24) în (9.23) obținem :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' & x_{10} \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' & y_{10} \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{21}' & \alpha_{21}'' & \alpha_{21}''' & x_{21} \\ \beta_{21}' & \beta_{21}'' & \beta_{21}''' & y_{21} \\ \gamma_{21}' & \gamma_{21}'' & \gamma_{21}''' & z_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.25}$$

sau

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{21}' & \alpha_{21}'' & \alpha_{21}''' \\ \beta_{21}' & \beta_{21}'' & \beta_{21}''' \\ \gamma_{21}' & \gamma_{21}'' & \gamma_{21}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{9.26}$$

Relațiile (9.25) şi (9.26) permit determinarea coordonatelor absolute ale oricărui punct P aparținând rigidului. Impunând în (9.25) sau (9.26) $x_2=0$, $y_2=0$, $z_2=0$ se obțin coordonatele absolute ale originii reperului T_2 în reperul fix T_0 :

$$\begin{bmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' & x_{10} \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' & y_{10} \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.27}$$

sau

$$\begin{bmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{bmatrix}$$

(9.28)

Relațiile (9.25) şi (9.26) pot fi scrise şi simbolic:

$$\underset{(4\times 1)}{{}^{0}\{P\}_2} = \underset{(4\times 4)}{{}^{0}[T]_1} \cdot \underset{(4\times 4)}{{}^{1}[T]_2} \cdot \underset{(4\times 1)}{{}^{2}\{P\}_2} \qquad (9.29)$$

$$\underset{3\times 1)}{{}^{0}\{P\}_2} = \underset{(3\times 1)}{{}^{0}\{O_1\}} + \underset{(3\times 1)}{{}^{0}[R]_1} \cdot \underset{(3\times 1)}{{}^{1}[O_2]} + \underset{(3\times 3)}{{}^{0}[R]_1} \cdot \underset{(3\times 3)}{{}^{1}[R]_2} \cdot \underset{(3\times 1)}{{}^{2}\{P\}_2} \qquad (9.30)$$

Matricele [T] (4×4) se numesc matrice de transformare sau de trecere iar matricele [R] (3×3) se numesc matrice de rotație sau matricele cosinusurilor directoare .

Luând în considerare (9.28) relația (9.26) devine :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{21}' & \alpha_{21}'' & \alpha_{21}''' \\ \beta_{21}' & \beta_{21}'' & \beta_{21}''' \\ \gamma_{21}' & \gamma_{21}'' & \gamma_{21}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad (9.31)$$

Pe de alta parte putem scrie :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{20} \\ y_{20} \\ z_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{20}' & \alpha_{20}'' & \alpha_{20}''' \\ \beta_{20}' & \beta_{20}'' & \beta_{20}''' \\ \gamma_{20}' & \gamma_{20}'' & \gamma_{20}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad (9.32)$$

Din compararea relațiilor (9.32) şi (9.31) rezultă orientarea reperului T_2 față de T_0:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{20}' & \alpha_{20}'' & \alpha_{20}''' \\ \beta_{20}' & \beta_{20}'' & \beta_{20}''' \\ \gamma_{20}' & \gamma_{20}'' & \gamma_{20}''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10}' & \alpha_{10}'' & \alpha_{10}''' \\ \beta_{10}' & \beta_{10}'' & \beta_{10}''' \\ \gamma_{10}' & \gamma_{10}'' & \gamma_{10}''' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{21}' & \alpha_{21}'' & \alpha_{21}''' \\ \beta_{21}' & \beta_{21}'' & \beta_{21}''' \\ \gamma_{21}' & \gamma_{21}'' & \gamma_{21}''' \end{bmatrix} \qquad (9.33)$$

sau restrâns

$$ {}^{0}[R]_2 = {}^{0}[R]_1 . {}^{1}[R]_2 \tag{9.34} $$

Putem uşor generaliza în cazul a "n" repere mobile, reperul "n" fiind solidar cu rigidul. Coordonatele absolute x_0, y_0, z_0 ale punctului P în triedrul T_0 în funcție de coordonatele x_n, y_n, z_n ale aceluiaşi punct in triedrul T_n sunt date de relația:

$$ \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \alpha'_{i,i-1} & \alpha''_{i,i-1} & \alpha'''_{i,i-1} & x_{i,i-1} \\ \beta'_{i,i-1} & \beta''_{i,i-1} & \beta'''_{i,i-1} & y_{i,i-1} \\ \gamma'_{i,i-1} & \gamma''_{i,i-1} & \gamma'''_{i,i-1} & z_{i,i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{9.35} $$

Putem obține coordonatele absolute ale originii triedrului T_n şi orientarea triedrului T_n față de T_0:

$$ \begin{bmatrix} x_{n0} \\ y_{n0} \\ z_{n0} \\ 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} \alpha'_{i,i-1} & \alpha''_{i,i-1} & \alpha'''_{i,i-1} & x_{i,i-1} \\ \beta'_{i,i-1} & \beta''_{i,i-1} & \beta'''_{i,i-1} & y_{i,i-1} \\ \gamma'_{i,i-1} & \gamma''_{i,i-1} & \gamma'''_{i,i-1} & z_{i,i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9.36} $$

$$ \begin{bmatrix} \alpha_{n0}' & \alpha_{n0}'' & \alpha_{n0}''' \\ \beta_{n0}' & \beta_{n0}'' & \beta_{n0}''' \\ \gamma_{n0}' & \gamma_{n0}'' & \gamma_{n0}''' \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \alpha'_{i,i-1} & \alpha''_{i,i-1} & \alpha'''_{i,i-1} \\ \beta'_{i,i-1} & \beta''_{i,i-1} & \beta'''_{i,i-1} \\ \gamma'_{i,i-1} & \gamma''_{i,i-1} & \gamma'''_{i,i-1} \end{bmatrix} \tag{9.37} $$

Relațiile (9.35), (9.36) şi (9.37) se pot scrie şi sub formă simbolică :

$$ {}^{0}\{P\}_n = \prod_{i=1}^{n} {}^{i-1}[T]_i . {}^{n}\{P\}_n = {}^{0}[T]_n . {}^{n}\{P\}_n \tag{9.38} $$

$$ {}^{0}\{O_n\} = \prod_{i=1}^{n-1} {}^{i-1}[T]_i . {}^{n-1}\{O_n\} = {}^{0}[T]_{n-1} . {}^{n-1}\{O_n\} \tag{9.39} $$

$$ {}^{0}[R]_n = \prod_{i=1}^{n} {}^{i-1}[R]_i \qquad (9.40) $$

În relațiile de mai sus semnificațiile notațiilor sunt următoarele:
x_0, y_0, z_0 -coordonatele absolute ale punctului P în reperul fix $O_0x_0y_0z_0$;
x_n, y_n, z_n -coordonatele punctului P în reperul $O_nx_ny_nz_n$, legat de rigid;
x_{n0}, y_{n0}, z_{n0} -coordonatele absolute ale originii O_n a reperului $O_nx_ny_nz_n$;
$x_{i,i-1}, y_{i,i-1}, z_{i,i-1}$ -coordonatele relative ale originii O_i a reperului $O_ix_iy_iz_i$ în reperul precedent $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$;
$\alpha_{n0},...,\gamma_{n0}'''$ -cosinusurile directoare ale axelor reperului $O_nx_ny_nz_n$ în reperul fix $O_0x_0y_0z_0$;
$\alpha_{i,i-1},...,\gamma'''_{i,i-1}$ -cosinusurile directoare ale axelor reperului $O_ix_iy_iz_i$ în reperul precedent $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$.

9.2.2. Compunerea vitezelor în mişcarea relativă a rigidului

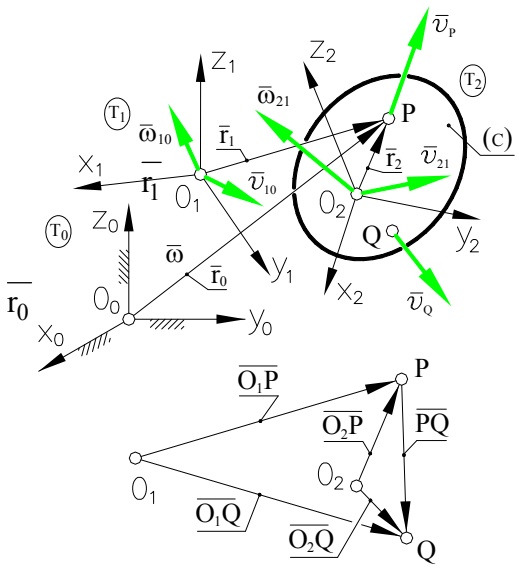


Fig. 9.7

În figura 9.7 este reprezentat rigidul (C), solidar cu triedrul $O_2x_2y_2z_2$, aflat în mişcare față de triedrul mobil $O_1x_1y_1z_1$ şi față de triedrul fix $O_0x_0y_0z_0$.

Se presupun cunoscuți următorii parametrii cinematici:

$\bar{v}_{10}$ - viteza originii triedrului (T_1) față de triedrul (T_0);

$\bar{\omega}_{10}$ - viteza unghiulară în mişcarea triedrului (T_1) față de (T_0);

$\bar{v}_{21}$ - viteza relativă a originii O_2 a triedrului T_2, față de triedrul T_1;

$\bar{\omega}_{21}$ - viteza unghiulară în mişcarea relativă a corpului solidar cu triedrul T_2 față de triedrul T_1.

Se cere determinarea vitezei absolute $\bar{v}_P$ a unui punct P oarecare al corpului față de triedrul fix (T_0) şi vitezei unghiulare absolute $\bar{\omega}_{20}$ a rigidului (triedrului T_2) față de sistemul fix (T_0).

Pentru determinarea vitezei absolute $\bar{v}_P$ a punctului P vom folosi rezultatele obținute la compunerea vitezelor în mişcarea relativă a punctului. Astfel, se poate considera că punctul P se mişcă odată cu rigidul față de triedrul T_1, care se mişcă la rândul său față de (T_0).

Rezultă că viteza relativă a punctului P față de (T_1) este viteza unui punct solidar cu (T_2) față de (T_1):

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2 \tag{9.41}$$

Viteza de transport a punctului P va fi viteza față de (T_0) a unui punct solidar cu (T_1) care în momentul considerat coincide cu P:

$$\bar{v}_t = \bar{v}_{10} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1 \tag{9.42}$$

Viteza absolută a punctului P va fi :

$$\bar{v}_P = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \bar{v}_{10} + \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2 \tag{9.43}$$

sau :

$$\bar{v}_P = \sum_{i=1}^{2} \bar{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{2} \bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i \tag{9.44}$$

Relația (9.44) poate fi uşor generalizată în cazul existenței mai multor mişcări de transport (n sisteme de referință mobile):

$$\bar{v}_P = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i \tag{9.45}$$

unde :

$\overline{v}_{i.i-1}$ - este viteza relativă originii triedrului (T_i) față de triedrul (T_{i-1});

$\overline{\omega}_{i,i-1}$ - este viteza unghiulară relativă în mişcarea triedrului (T_i) față de (T_{i-1});

$\overline{r}_i$ - este vectorul de poziție al punctului P în raport cu originea O_i a triedrului (T_i).

Pentru determinarea vitezei unghiulare absolute $\overline{\omega_{20}}$ a rigidului (T_2) față de sistemul fix (T_0) se utilizează relația (9.43) pentru două puncte distincte P şi Q:

$$\overline{v}_P = \overline{v}_{10} + \overline{v}_{21} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{O_1P} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{O_2P} \tag{9.46}$$

$$\overline{v}_Q = \overline{v}_{10} + \overline{v}_{21} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{O_1Q} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{O_2Q} \tag{9.47}$$

Scăzându-le obținem :

$$\overline{v}_Q = \overline{v}_P + \overline{\omega}_{10} \times (\overline{O_1Q} - \overline{O_1P}) + \overline{\omega}_{21} \times (\overline{O_2Q} - \overline{O_2P}) \tag{9.48}$$

Deoarece,

$$\overline{O_1Q} - \overline{O_1P} = \overline{O_2Q} - \overline{O_2P} = \overline{PQ},$$

rezultă:

$$\overline{v}_Q = \overline{v}_P + (\overline{\omega}_{10} + \overline{\omega}_{21}) \times \overline{PQ} \tag{9.49}$$

Pe de altă parte, de la cinematica rigidului se ştie că între vitezele a două puncte ale aceluiaşi rigid aflat în mişcare generală, cu viteza unghiulară absolută $\overline{\omega}_{20}$, există relația:

$$\overline{v}_Q = \overline{v}_P + \overline{\omega}_{20} \times \overline{PQ} \tag{9.50}$$

Din compararea relațiilor (9.49) şi (9.50) obținem legea de compunere a vitezelor unghiuare în mişcarea relativă a rigidului cu două sisteme de referință mobile :

$$\overline{\omega}_{20} = \overline{\omega}_{10} + \overline{\omega}_{21} \tag{9.51}$$

Putem uşor generaliza în cazul a "n" sisteme de referință mobile:

$$\overline{\omega}_{n0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{i,i-1} \tag{9.52}$$

Relația (9.52) exprimă faptul că viteza unghiulară absolută este egală cu suma vectorială a vitezelor unghiulare relative corespunzătoare mişcărilor componente.

Relațiile (9.45) şi (9.52) rezolvă complet problema distribuției vitezelor pentru un rigid în mişcare relativă: sunt determinate viteza unui punct al rigidului şi viteza unghiulară absolută.

Scriem relațiile (9.52) şi (9.45) sub forma:

$$\overline{\omega}_{n0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_{i,i-1} \; ; \quad \overline{v}_P = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_{i,\,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \overline{PO_i} \times \overline{\omega}_{i,\,i-1} \tag{9.53}$$

şi le comparăm cu relațiile din statică ce dau vectorul rezultant şi momentul rezultant :

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \; ; \; \overline{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{PO_i} \times \overline{F}_i \tag{9.54}$$

Se precizează că forțele $\overline{F}_i$ s-au considerat aplicate în punctele O_i iar reducerea sistemului s-a făcut în punctul P. Se observă o analogie perfectă între relațiile cinematice şi cele statice, numită analogie cinematico-statică. În aceste relații vectorul viteză unghiulară $\overline{\omega}_{i,i-1}$ este analog vectorului forță $\overline{F}_i$, vectorul $\overline{v}_{i,i-1}$ este analog vectorului cuplu $\overline{M}_i$, vectorul viteză unghiulară absolută $\overline{\omega}_{no}$ este analog vectorului rezultant $\overline{R}$ şi vectorul viteză absolută $\overline{v}_P$ este analog vectorului rezultant $\overline{M}_P$ în raport cu punctul P.

Relația care leagă vitezele a două puncte ale rigidului

$$\overline{v}_Q = \overline{v}_P + \overline{QP} \times \overline{\omega}_{n0} \tag{9.55}$$

este analoagă formulei din statică ce stabileşte variația momentului rezultant la schimbarea polului de reducere:

$$\overline{M}_Q = \overline{M}_P + \overline{QP} \times \overline{R} \tag{9.56}$$

Deci determinarea vectorilor $\overline{\omega}_{n0}$ şi $\overline{v}_P$ se face reducând vectorii alunecători $\overline{\omega}_{i,i-1}$ şi vectorii liberi $\overline{v}_{i,i-1}$ în punctul P.

9.2.3. Compunerea acceleraţiilor în mişcarea relativă a rigidului

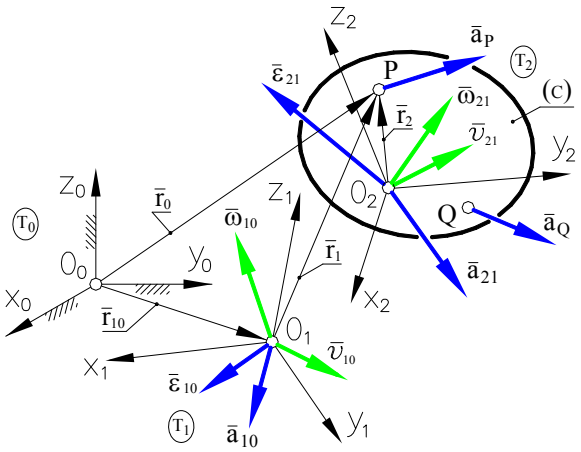


Fig. 9.8

Se presupun cunoscute mişcările relative ale triedrelor faţă de cele precedente prin parametrii cinematici de ordinul 1 şi 2:

- $\bar{v}_{10}, \bar{v}_{21}; \bar{\omega}_{10}, \bar{\omega}_{21};$
- $\bar{a}_{10}$ - acceleraţia originii O_1 a triedrului (T_1) faţă de (T_0);
- $\bar{\varepsilon}_{10}$ - acceleraţia unghiulară în mişcarea triedrului (T_1) faţă de (T_0);
- $\bar{a}_{21}$ - acceleraţia relativă a originii triedrului (T_2) faţă de (T_1);
- $\bar{\varepsilon}_{21}$ - acceleraţia unghiulară relativă a triedrului (T_2) faţă de (T_1);

Se cere determinarea acceleraţiei absolute $\overline{a_P}$ a unui punct P aparţinând corpului şi a acceleraţiei unghiulare absolute $\bar{\varepsilon}_{20}$ a triedrului (T_2) în mişcarea faţă de triedrul fix (T_0).

Acceleraţia absoluta a punctului P, având vectorul de poziţie $\bar{r}_1$ faţă de O_1 şi $\bar{r}_2$ faţă de O_2 se poate determina pe baza legii de compunere a acceleraţiilor şi mişcarea relativă a punctului material :

$$\bar{a}_P = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c \qquad (9.57)$$

Accelerația relativă a punctului P provine din mişcarea generală relativă a rigidului (T_2) în raport cu (T_1):

$$\bar{a}_r = \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) \tag{9.58}$$

Accelerația de transport a punctului P provine din mişcarea generală a rigidului considerat legat de (T_1) fața de (T_0):

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{10} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1) \tag{9.59}$$

Accelerația lui Coriolis a punctului P se va determina pe baza relației:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r = 2\bar{\omega}_{10} \times (\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) \tag{9.60}$$

Luând în considerare relațiile (3.56) – (3.58) rezultă:

$$\begin{aligned} \bar{a}_P = {} & \bar{a}_{10} + \bar{a}_{21} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1) + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) + \\ & + 2\bar{\omega}_{10} \times (\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) \end{aligned} \tag{9.61}$$

Relația (9.61) se poate uşor generaliza pentru "n" sisteme de referință mobile:

$$\begin{aligned} \bar{a}_P = {} & \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{i,i-1} + \sum_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_{i,i-1} \times \bar{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{\omega}_{i,i-1} \times (\bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i) + \\ & + 2\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{j,j-1} \times (\bar{v}_{i,i-1} + \bar{\omega}_{i,i-1} \times \bar{r}_i) \end{aligned} \tag{9.62}$$

Pentru n=3 avem:

$$\begin{aligned} \bar{a}_P = {} & \bar{a}_{10} + \bar{a}_{21} + \bar{a}_{32} + \bar{\varepsilon}_{10} \times \bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_2 + \bar{\varepsilon}_{32} \times \bar{r}_3 + \\ & + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{10} \times \bar{r}_1) + \bar{\omega}_{21} \times (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) + \bar{\omega}_{32} \times (\bar{\omega}_{32} \times \bar{r}_3) + \\ & + 2[\bar{\omega}_{10} \times (\bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2) + (\bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21}) \times (\bar{v}_{32} + \bar{\omega}_{32} \times \bar{r}_3)] \end{aligned} \tag{9.63}$$

Pentru determinarea accelerației unghiulare absolute în cazul a 2 sisteme de referință mobile cea mai simplă cale este de a deriva în raport cu timpul viteza unghiulară absolută $\bar{\omega}_{20}$:

$$\bar{\varepsilon}_{20} = \dot{\bar{\omega}}_{20} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{10} + \bar{\omega}_{21}) = \dot{\bar{\omega}}_{10} + \frac{\partial \bar{\omega}_{21}}{\partial t} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21} = \bar{\varepsilon}_{10} + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21}$$

(9.64)

În cazul existenței a "n" sisteme de referință mobile putem generaliza:

$$\overline{\varepsilon}_{n0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varepsilon}_{i,i-1} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\omega}_{j,j-1} \times \overline{\omega}_{i,i-1} \tag{9.65}$$

Aşadar pentru determinarea acceleraţiei unghiulare absolute $\overline{\varepsilon}_{n0}$ se însumează acceleraţiile unghiulare ale mişcărilor relative şi se adaugă o acceleraţie complementară:

$$\overline{\varepsilon}_{c} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\omega}_{j,j-1} \times \overline{\omega}_{i,i-1} \tag{9.66}$$

Pentru n = 3 rezultă:

$$\overline{\varepsilon}_{30} = \overline{\varepsilon}_{10} + \overline{\varepsilon}_{21} + \overline{\varepsilon}_{32} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{\omega}_{21} + \overline{\omega}_{10} \times \overline{\omega}_{32} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{\omega}_{32} \tag{9.67}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] ATANASIU, M., *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
[2] BRATU, P., *Mecanica Teoretică*, Editura Impuls, Bucureşti, 2006
[3] DEN HARTOG, J.P., *Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 1961.
[4] ISPAS, V., ş.a., *Mecanica*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1997.
[5] ITUL, T.P., *Mecanica-Statica*, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2000.
[6] ITUL, T.P., *Mecanica-Cinematica şi Dinamica*, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2004.
[7] McGILL, D. J., KING, W.W., *Engineering Mechanics*, Georgia Institute of Technology, Boston, USA, 1991.
[8] OLARIU, V., SIMA, P., ACHIRILOAIE, V., *Mecanica tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.
[9] POPESCU, P., *Mecanica: Cinematica, Dinamica*, Atelierul de multiplicare al Institutului Politehnic Cluj, Cluj-Napoca, 1981.
[10] RĂDOI, M., DECIU, E., *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.
[11] RIPIANU, A., *Mecanica solidului rigid*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1973.
[12] RIPIANU, A., POPESCU, P., BĂLAN, B., *Mecanica tehnică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.
[13] SARIAN, M., *Mecanica şi Rezistența materialelor, Vol. I, Mecanica*, Ediția III, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
[14] STOENESCU, A. SILAŞI, G., *Mecanica teoretică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.
[15] TARG, S., *Élements de Mécanique Rationnelle*, Editions MIR, Moscou, 1975.
[16] TUDOSIE, C., *Mecanică teoretică*, Atelierul de multiplicare al Institutului Politehnic Cluj, Cluj-Napoca, 1972.
[17] VÂLCOVICI, V. BĂLAN, Ş., VOINEA, R., *Mecanica teoretică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.
[18] VOINEA, R., VOICULESCU, D., CEUŞU, V., *Mecanica teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
[19] VOINEA, R., VOICULESCU, D., FLORIAN-PAUL, S., *Introducere în Mecanica solidului rigid cu aplicații în inginerie*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1989.